



数 学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

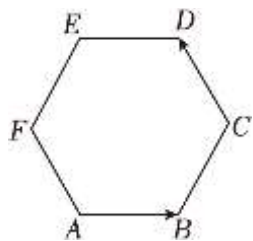
1. 已知集合 $M = \{x | x + 2 \geq 0\}$, $N = \{x | x - 1 < 0\}$. 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x \leq 1\}$ C. $\{x | x \geq -2\}$ D. $\{x | x < 1\}$

2. 命题: “ $\exists x < 1, x^2 < 1$ ” 的否定是 ()

- A. $\forall x \geq 1, x^2 < 1$ B. $\exists x \geq 1, x^2 \geq 1$ C. $\forall x < 1, x^2 \geq 1$ D. $\exists x < 1, x^2 \geq 1$

3. 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中， $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} =$ ()



- A. $\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{BF}$ C. $\overrightarrow{EC}$ D. $\overrightarrow{BE}$

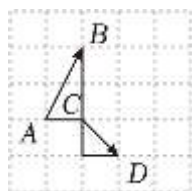
4. 若 $a > b$, 则 ()

- A. $a^3 < b^3$ B. $|a| > |b|$ C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $2^{a-b} > 1$

5. 已知 $x > 0$, 则 $x - 4 + \frac{4}{x}$ 的最小值为 ()

- A. -2 B. 0 C. 1 D. $2\sqrt{2}$

6. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若网格中每个小正方形的边长均为 1，则 $|\vec{AB} + \vec{CD}| =$ ()



- A. $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$

7. 已知 $3^a = 4$, $b = \log_3 \frac{9}{4}$, 则 $a + b =$ ()

- A. 9 B. 2 C. $\frac{16}{9}$ D. -2

8. 已知集合 $A = \{x | |x - 1| < 3\}$, $B = \{x | x^2 - 3x - 10 < 0\}$, 若 $a \notin A$, 且 $a \in B$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-2, 4)$ B. $(4, 5)$ C. $[4, 5]$ D. $[4, 5)$

9. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量，且 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 则 “ $|\vec{a} + \vec{b}| \geq 3$ ” 是 “存在实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ” 成立的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

10. 一种细胞的分裂速度 v (单位: 个/秒) 与其年龄 t (单位: 岁) 的关系可以用下面的分段函数来表示:

$$v(t) = \begin{cases} 0.5t, & 0 \leq t \leq 10, \\ \frac{2a}{b+10 \log_2 \frac{t}{a}}, & t > 10, \end{cases} \text{ 其中 } a, b \in \mathbf{R}. \text{ 而且这种细胞从诞生到死亡, 它的分裂速度变化是连}$$

续的. 若这种细胞 5 岁和 60 岁的分裂速度相等, 则 $a =$ ()

(参考数据: $\log_2 3 = 1.585$)

- A. 6.402
- B. 6.462
- C. 6.502
- D. 6.522

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. (5 分) 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}$ 的定义域为_____.

12. (5 分) 下面茎叶图记录的是甲、乙两位篮球运动员在最近 5 场比赛中的得分, 则甲得分的中位数是_____, 乙得分的方差为_____.

甲		乙
9 7	0	8
2 1	1	0 1 1 5
5	2	

13. (5 分) 已知 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为一组不共线的向量, 且向量 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2, \vec{b} = \vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, 能使得 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的一组实数 x, y 的值可以为 $x =$ _____, $y =$ _____.

14. (5 分) 函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x - a, & x > 1, \\ x - a, & x \leq 1, \end{cases}$ 若 $a = 0$, 则 $f(f(2))$ 的值为_____; 若 $f(x)$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

15. (5 分) 记函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若存在非负实数 k , 对任意的 $x \in D$, 总有 $|f(x) - f(-x)| \leq k$, 则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$.

①所有偶函数都具有性质 $P(0)$;

② $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 具有性质 $P(1)$;

③若 $f(x) = x^2 + x + 1$, 则一定存在正实数 k , 使得 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$;

④已知 $a > 0$, 若函数 $f(x) = \frac{a}{1+2^x}$ 具有性质 $P(k)$, 则 $a \in (0, k]$.

其中所有正确结论的序号是_____.

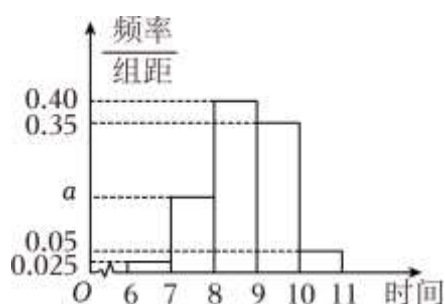
三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (13 分) 已知函数 $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$.

- (I) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;
 (II) 用函数单调性定义证明: 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数;
 (III) 写出函数 $f(x)$ 的值域 (结论不要求证明).

17. (13 分) 每年的 3 月 21 日是世界睡眠日, 充足的睡眠、均衡的饮食和适当的运动, 是国际社会公认的三项健康标准. 某校高一某班学生某天睡眠时间的频率分布直方图如图所示 (样本数据分组为 $[6, 7)$, $[7, 8)$, $[8, 9)$, $[9, 10)$, $[10, 11]$, 单位: 小时).

- (I) 求图中 a 的值, 估计该校高一学生该天睡眠时间不小于 9 小时的频率;
 (II) 从该校高一学生中随机抽取 2 人, 用频率估计概率, 计算这两位学生至少有 1 人该天睡眠时间不小于 9 小时的概率.



18. (14 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, 再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为已知, 使 $f(x)$ 存在并且唯一, 并完成下列问题.

- (I) 求 a, b 的值;
 (II) 已知函数 $g(x) = f(x) - (m-2)x$ 有两个不同的正数零点 x_1, x_2 .
 (i) 求 m 的取值范围;
 (ii) 若 $|x_1 - x_2| = 2$, 求 m 的值.

条件①: $f(0) = 4$;

条件②: $\forall x \in \mathbf{R}, f(1+x) = f(1-x)$;

条件③: $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(1)$.

注: 如果选择多组条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (15 分) 2023 年 10 月 17 日至 18 日, 第三届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行, 成为纪念“一带一路”倡议十周年最隆重的活动. 此次活动主题为“高质量共建“一带一路”, 携手实现共同发展繁荣”, 而作为“一带一路”重要交通运输的中欧班列越来越繁忙. 下表是从 2018 年到 2022 年, 每年中欧班列运行的列数 (单位: 万列).

年份	2018	2019	2020	2021	2022
运行列数	0.63	0.82	1.24	1.5	1.6

- (I) 计算中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数;
 (II) 从 2018 年到 2022 年这 5 年中随机选取 2 年, 求这两年运行列数和大于 2.4 (单位: 万列) 的概率.

率；

(III) 设 2018 年, 2019 年, 2020 年运行列数的方差为 s_1^2 , 2020 年, 2021 年, 2022 年运行列数的方差为 s_2^2 , 从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的方差为 s_3^2 , 试判断 s_1^2 , s_2^2 , s_3^2 的大小关系. (结论不要求证明)

20. (15 分) 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x - 8)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的零点;

(II) 求函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x) = x+1$ 的图象的交点坐标;

(III) 若函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=4x+b$ 的下方, 求 b 的取值范围.

21. (15 分) 对于函数 $y=f(x)$, 记所有满足 $\forall s>t>0$, 都有 $f(s) \geq f(t)$ 的函数构成集合 A ; 所有满足 $\forall s, t \in (0, +\infty)$, 都有 $f(s+t) \geq f(s) + f(t)$ 的函数构成集合 B .

(I) 分别判断下列函数是否为集合 B 中的元素, 并说明理由,

① $f(x) = 2x+1$; ② $f(x) = x^2$;

(II) 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+a)$ ($a \geq 0$) 是集合 B 中的元素, 求 a 的最小值;

(III) 若 $g(x) = xf(x)$, 求证: $f(x) \in A$ 是 $g(x) \in B$ 的充分不必要条件.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【分析】求出集合 M 、 N 的范围，再根据交集的定义可得.

【解答】解：由题意， $M = \{x|x \geq -2\}$ ， $N = \{x|x < 1\}$ ，

$$\therefore M \cap N = \{x|-2 \leq x < 1\}.$$

故选：A.

【点评】本题考查集合的交集求法，属简单题.

2. 【分析】直接利用含有一个量词的命题的否定方法进行求解即可.

【解答】解：根据含有量词的命题的否定，

则“ $\exists x < 1, x^2 < 1$ ”的否定是“ $\forall x < 1, x^2 \geq 1$ ”.

故选：C.

【点评】本题考查了含有量词的命题的否定，要掌握其否定方法：先改变量词，然后再否定结论，属于基础题.

3. 【分析】结合向量的线性运算法则，即可求解.

【解答】解：在正六边形 $ABCDEF$ 中，

$$\text{则 } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC}.$$

故选：C.

【点评】本题主要考查向量的减法，属于基础题.

4. 【分析】举反例可判断 ABC ，利用指数函数的性质可判断 D .

【解答】解：对于 A ，取 $a=2$ ， $b=1$ ，满足 $a > b$ ，但是 $a^3 > b^3$ ，故 A 错误；

对于 B ，取 $a=1$ ， $b=-2$ ，满足 $a > b$ ，但是 $|a| < |b|$ ，故 B 错误；

对于 C ，取 $a=1$ ， $b=-2$ ，满足 $a > b$ ，但是 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，故 C 错误；

对于 D ， $\because a > b$ ， $\therefore a - b > 0$ ，

$$\therefore 2^{a-b} > 1, \text{ 故 } D \text{ 正确.}$$

故选：D.

【点评】本题主要考查了不等式的性质，考查了指数函数的性质，属于基础题.

5. 【分析】利用基本不等式求解即可.

【解答】解： $\because x > 0$ ，

$$\therefore x - 4 + \frac{4}{x} = x + \frac{4}{x} - 4 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} - 4 = 0,$$

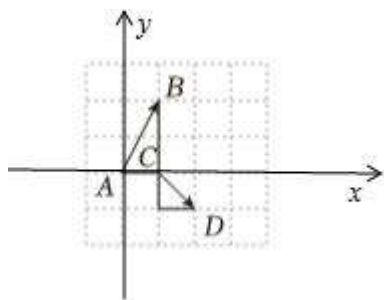
当且仅当 $x = \frac{4}{x}$ ，即 $x=2$ 时取等号.

故选：B.

【点评】本题考查基本不等式的应用，属于基础题.

6. 【分析】以 A 为原点建立如图所示平面直角坐标系，求出对应的坐标，再结合平面向量的坐标运算，以及向量模公式，即可求解.

【解答】解：如图，以 A 为原点建立如图所示平面直角坐标系，



网格中每个小正方形的边长均为 1，

则 $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(1, 0)$, $D(2, -1)$,

故 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (1, -1)$,

故 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2, 1)$,

所以 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

故选：B.

【点评】本题主要考查向量的模，属于基础题.

7. 【分析】可得出 $a = \log_3 4$ ，然后根据对数的运算性质即可求出答案.

【解答】解： $\because 3^a = 4$,

$\therefore a = \log_3 4$, 且 $b = \log_3 \frac{9}{4}$,

$\therefore a + b = \log_3 9 = 2$.

故选：B.

【点评】本题考查了对数的定义，对数的运算性质，是基础题.

8. 【分析】先求出集合 A , B ，然后结合元素与集合关系即可求解.

【解答】解： $A = \{x | |x - 1| < 3\} = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{x | x^2 - 3x - 10 < 0\} = \{x | -2 < x < 5\}$,

若 $a \notin A$, 且 $a \in B$, 则 $\begin{cases} a \geq 4 \text{ 或 } a \leq -2 \\ -2 < a < 5 \end{cases}$, 即 $4 \leq a < 5$.

故选：D.

【点评】本题主要考查了元素与集合关系的应用及含绝对值不等式及二次不等式的求解，属于基础题.

9. 【分析】根据充分必要条件的定义，对两个条件进行正反推理论证，即可得到本题的答案.

【解答】解：当 $|\vec{a} + \vec{b}| \geq 3$ 时，结合 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq 3$ 可知 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$, 且 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 同向，

此时存在实数 $\lambda = 2$, 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, 故充分性成立；

当存在实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ 时，结合 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 可能 $\lambda = -2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 1 < 3$, 必要性不成立.

综上所述，“ $|\vec{a} + \vec{b}| \geq 3$ ”是“存在实数 λ , 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ”成立的充分不必要条件.

故选：A.

【点评】本题主要考查平面向量共线的条件、充要条件的判断及其应用，属于基础题.

$$10. \text{【分析】由题意可得} \begin{cases} 0.5 \times 10 = \frac{2a}{b + \log_2 \frac{10}{a}} \\ 0.5 \times 5 = \frac{2a}{b + \log_2 \frac{60}{a}} \end{cases}, \text{ 然后结合对数的运算求解.}$$

$$\text{【解答】解: 由题意可得} \begin{cases} 0.5 \times 10 = \frac{2a}{b + \log_2 \frac{10}{a}} \\ 0.5 \times 5 = \frac{2a}{b + \log_2 \frac{60}{a}} \end{cases},$$

$$\text{则} \frac{b + \log_2 \frac{60}{a}}{b + \log_2 \frac{10}{a}} = 2,$$

$$\text{即} b + \log_2 \frac{10}{a} = \log_2 6,$$

$$\text{则} \frac{2a}{\log_2 6} = 5,$$

$$\text{即} a = \frac{5}{2} \log_2 6 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \log_2 3 = 6.462.$$

故选: B.

【点评】本题考查了函数的解析式，重点考查了对数的运算，属中档题.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 【分析】根据分母不为 0 以及二次根式的性质求出函数的定义域即可.

【解答】解: 由题意得:

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得: } x \geq 1 \text{ 且 } x \neq 2,$$

故函数的定义域是 $[1, 2) \cup (2, +\infty)$,

故答案为: $[1, 2) \cup (2, +\infty)$.

【点评】本题考查了求函数的定义域问题，考查二次根式的性质，是一道基础题.

12. 【分析】利用中位数的定义和方差公式可求得结果.

【解答】解: 甲得分由小到大排列依次为: 7、9、11、12、25,

所以甲得分的中位数为 11,

乙得分由小到大排列依次为: 8、10、11、11、15,

$$\text{所以乙得分的中位数为 11, 方差为 } s^2 = \frac{(8-11)^2 + (10-11)^2 + 2 \times (11-11)^2 + (15-11)^2}{5} = \frac{26}{5}.$$

故答案为: 11; $\frac{26}{5}$.

【点评】本题主要考查了中位数和方差的计算，属于基础题.

13. 【分析】由 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 知 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，再由平面向量基本定理可得 $xy=4$.

【解答】解：因为 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ ， $\vec{b} = \vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

所以存在实数 λ 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，

即 $x\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \lambda(\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)$ ，即 $x\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \lambda\vec{e}_1 + \lambda y\vec{e}_2$ ，

由平面向量基本定理可得： $x = \lambda$ ， $\lambda y = 4$ ，即 $y = \frac{4}{\lambda}$ ，

所以 $xy = 4$ ，可取 $x = 1$ ， $y = 4$.

故答案为：1；4.

【点评】本题考查平面向量基本定理，属于基础题.

14. 【分析】若 $a=0$ ，代入计算出 $f(2)$ 的值，再计算 $f(f(2))$ 的值；先确定出 $y = \log_2 x - a$ ， $y = x - a$ 在各自定义域内各有一个零点，然后列出关于零点的不等式组，由此求解出 a 的取值范围.

【解答】解：若 $a=0$ ，则 $f(f(2)) = f(\log_2 2) = f(1) = 1$ ，

因为 $y = \log_2 x - a$ ， $y = x - a$ 均至多有一个零点，

所以 $y = \log_2 x - a$ 在 $(1, +\infty)$ 内有一个零点， $y = x - a$ 在 $(-\infty, 1]$ 内有一个零点，

且 $y = \log_2 x - a$ 的零点为 $x = 2^a$ ， $y = x - a$ 的零点为 $x = a$ ，

所以 $\begin{cases} 2^a > 1 = 2^0 \\ a \leq 1 \end{cases}$ ，

由指数函数单调性可知 $0 < a \leq 1$ ，

所以 a 的取值范围是 $(0, 1]$.

故答案为：1； $(0, 1]$.

【点评】本题主要考查了分段函数的应用，考查了求函数的零点，属于中档题.

15. 【分析】利用性质 $P(k)$ 可判断①；利用基本不等式结合性质 $P(k)$ 可判断②；根据函数 $|f(x) - f(-x)|$ 的值域可判断③；根据已知条件可得出 $|f(x) - f(-x)| \leq k$ 可得出 $|\frac{a(1-2^x)}{1+2^x}| \leq k$ ，结合

不等式恒成立可得出 a 的取值范围，可判断④.

【解答】解：对于①，设函数 $f(x)$ 是定义在 D 上的偶函数，

对任意的 $x \in D$ ， $|f(x) - f(-x)| = 0$ ，所以，所有偶函数都具有性质 $P(0)$ ，故①对；

对于②，对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，

$$|f(x) - f(-x)| = \left| \frac{x}{x^2+1} - \frac{(-x)}{(-x)^2+1} \right| = \frac{2|x|}{x^2+1},$$

当 $x \neq 0$ 时，

$$|f(x) - f(-x)| = \frac{2|x|}{x^2+1} = \frac{2}{|x| + \frac{1}{|x|}} \leq \frac{2}{\sqrt{|x| \cdot \frac{1}{|x|}}} = 1,$$

当且仅当 $|x| = \frac{1}{|x|}$ 时, 即当 $x = \pm 1$ 时, 等号成立, 又因为 $|f(0) - f(0)| = 0 \leq 1$, 故对任意的 $x \in \mathbf{R}$,

$$|f(x) - f(-x)| \leq 1,$$

所以, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 具有性质 $P(1)$, 故②对;

对于③, 因为 $|f(x) - f(-x)| = |(x^2+x+1) - (x^2-x+1)| = 2|x|$,

且函数 $y=2|x|$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 所以, 不存在实数 k , 使得 $|f(x) - f(-x)| \leq k$, 故③错;

$$\text{对于④, } |f(x) - f(-x)| = \left| \frac{a}{1+2^x} - \frac{a}{1+2^{-x}} \right| = \left| \frac{a}{1+2^x} - \frac{a \cdot 2^x}{2^x(1+2^{-x})} \right| = \left| \frac{a(1-2^x)}{1+2^x} \right| \leq k,$$

因为 $a > 0$, 易知 $k > 0$, 因为 $2^x > 0$, 则 $2^x + 1 > 1$, 则 $0 < \frac{2}{2^x + 1} < 2$,

$$\text{所以, } -1 < \frac{2}{2^x + 1} - 1 < 1,$$

$$\text{即 } -1 < \frac{2 - (1+2^x)}{1+2^x} = \frac{1-2^x}{1+2^x} < 1, \text{ 所以, } 0 \leq \left| \frac{1-2^x}{1+2^x} \right| < 1,$$

$$\text{要使得 } |f(x) - f(-x)| = \left| \frac{a(1-2^x)}{1+2^x} \right| \leq k \text{ 恒成立, 则 } k \geq a,$$

又因为 $a > 0$, 则 $0 < a \leq k$,

所以, 若函数 $f(x) = \frac{a}{1+2^x}$ 具有性质 $P(k)$, 则 $a \in (0, k]$, 故④对.

故答案为: ①②④.

【点评】本题考查了函数恒成立问题, 考查了函数思想, 属于中档题.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【分析】(I) 利用奇偶函数的定义判断即可;

(II) 利用单调性定义证明;

(III) 结合奇偶性, 判断其值域.

【解答】解: (I) $f(x)$ 是奇函数. 证明如下:

$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

因为 $\forall x \in \{x|x \neq 0\}$, 都有 $-x \in \{x|x \neq 0\}$,

$$\text{且 } f(-x) = \frac{|-x|+1}{-x} = -\frac{|x|+1}{x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数;

(II) 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{|x_1|+1}{x_1} - \frac{|x_2|+1}{x_2} \\ &= \frac{x_1+1}{x_1} - \frac{x_2+1}{x_2} = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}, \end{aligned}$$

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $x_1 x_2 > 0$, $x_2 - x_1 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

所以 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

(III) 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

【点评】本题考查函数的性质, 属于中档题.

17. 【分析】(I) 由频率分布直方图中各个小矩形的面积之和为 1 可求出 a 的值, 进而求出睡眠时间不小于 9 小时的频率;

(II) 先求出这两位学生该天睡眠时间都小于 9 小时的概率, 再利用对立事件的概率关系求解.

【解答】解: (I) 因为 $(0.025 + a + 0.40 + 0.35 + 0.05) \times 1 = 1$,

所以 $a = 0.175$,

该校高一学生该天睡眠时间不少于 9 小时的频率为: $(0.35 + 0.05) \times 1 = 0.40$;

(II) 从该校高一学生中随机抽取 2 人, 用频率估计概率, 这两位学生该天睡眠时间都小于 9 小时的概率为 $(1 - 0.4)^2 = 0.36$,

所以至少有 1 人该天睡眠时间不小于 9 小时的概率 $1 - 0.36 = 0.64$.

【点评】本题主要考查了频率分布直方图的应用, 考查了独立事件的概率乘法公式, 属于基础题.

18. 【分析】分别讨论选①②, ①③, ②③的条件;

②③时, 由于 b 不确定, 所以解析式不唯一, (舍);

选①②, (I) 由①可得 b 的值, 由②可得 a 值, 即求出 a, b 的值;

(II) 由 (I) 可得 $f(x)$ 的解析式, (i) 可得 $g(x) = 0$ 有两个正实数解满足的条件, 可得 m 的范围;

(ii) 将 $|x_1 - x_2| = 2$, 转化为 $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{m^2 - 16} = 2$, 由韦达定理可得 m 的值;

选①③, (I) 由①可得 b 的值, 由③可得 a 的值, 即求出 a, b 的值;

(II) 同选①②时的情况.

【解答】解: 选②③,

由②: $\forall x \in \mathbf{R}, f(1+x) = f(1-x)$, 可得对称轴 $x=1$,

条件③: $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(1)$,

两个条件只能得到 $-\frac{a}{2} = 1$, 即 $a = -2$,

b 的值不唯一, 所以函数 $f(x)$ 的解析式不唯一.

选择条件①②:

(I) 由①得 $f(0) = b = 4$,

由②得 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$, 所以 $-\frac{a}{2} = 1$, 解得 $a = -2$,

所以 $a = -2, b = 4$;

(II) 由 (I) 知 $f(x) = x^2 - 2x + 4$,

所以 $g(x) = f(x) - (m-2)x = (x^2 - 2x + 4) - (m-2)x = x^2 - mx + 4$,

(i) 因为 $g(x)$ 有两个不同的正数零点 x_1, x_2 ,

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ \Delta = m^2 - 16 > 0 \end{cases},$$

解得 $m > 4$.

所以 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$;

(ii) 因为 $|x_1 - x_2| = 2$, 即 $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{m^2 - 16} = 2$,

所以 $m^2 = 20$,

又因为 $m > 4$, 所以 $m = 2\sqrt{5}$.

选择条件①③:

(I) 由①得 $f(0) = b = 4$,

由③得 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$,

所以 $\frac{a}{2} = 1$, 可得 $a = -2$.

(II) 同选择条件①②情况一样.

(i) $(4, +\infty)$;

(ii) $2\sqrt{5}$.

【点评】本题考查二次函数的性质的应用, 韦达定理的应用, 属于基础题.

19. 【分析】(I) 根据平均数计算公式求解出结果;

(II) 列出所有可能的结果, 然后分析满足要求的结果数, 再利用古典概型的概率公式求解;

(III) 根据运行列数的数据变化情况作出判断.

【解答】解: (I) 从 2018 年到 2022 年运行列数的平均值为 $\frac{0.63+0.82+1.24+1.5+1.6}{5} = 1.158$ (万列),

所以中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数为 1.158 万列;

(II) 从 2018 年到 2022 年随机选取 2 年, 所有可能的结果有 10 种, 它们是:

(2018, 2019), (2018, 2020), (2018, 2021), (2018, 2022), (2019, 2020), (2019, 2021), (2019, 2022), (2020, 2021), (2020, 2022), (2021, 2022),

用 A 表示“这两年运行列数和大于 2.4 万列”这一事件,

则 A 中的结果有 4 个, 它们是 (2019, 2022), (2020, 2021), (2020, 2022), (2021, 2022),

所以所求的概率 $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$;

(III) $s_2^2 < s_1^2 < s_3^2$, 理由如下:

2020, 2021, 2022 这三年运行列数增长较慢, 数据变化幅度小, 所以方差最小; 2018, 2019, 2020,

2021, 2022, 这五年运行列数增长很快, 且 2022 的运行列数约是 2018 年的 2.54 倍, 数据变化幅度很大, 所以方差最大.

【点评】本题主要考查了平均数的计算, 考查了古典概型的概率公式, 属于基础题.

20. 【分析】(I) 令 $f(x) = 0$, 解得 x 的值, 即可得函数的零点;

(II) 令 $f(x) = g(x)$, 转化为指数形式, 解得 x 的值, 代入函数 $g(x)$ 中, 可得交点的纵坐标, 即求出交点坐标;

(III) 由题意可得 $f(x) < 4x + b$, 转化为指数表达式, 换元, 由函数的性质可得关于 b 的不等式, 进而求出 b 的范围.

【解答】解: (I) 令 $\log_2(4^x - 8) = 0$,

所以 $4^x - 8 = 1$, 即 $4^x = 9$,

所以 $x = \log_4 9 = \log_2 3$,

所以 $f(x)$ 零点为 $\log_2 3$;

(II) 令 $f(x) = g(x)$,

即 $\log_2(4^x - 8) = x + 1$,

所以 $4^x - 8 = 2^{x+1}$,

整理可得 $(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$,

即 $(2^x - 4)(2^x + 2) = 0$,

所以 $2^x = 4$, 解得 $x = 2$;

将 $x = 2$ 代入 $g(x) = x + 1$ 中, 可得 $g(2) = 3$,

所以函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 图象的交点坐标为 $(2, 3)$;

(III) 由 $4^x - 8 > 0$ 得 $2^{2x} > 2^3$, 所以 $2x > 3$, 解得 $x > \frac{3}{2}$,

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\frac{3}{2}, +\infty)$,

由题意, $f(x) < 4x + b$ 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上恒成立.

所以 $4^x - 8 < 2^{4x+b} = 2^b \cdot 4^{2x}$ 在 $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上恒成立.

令 $4^x = t \in (8, +\infty)$,

则 $2^b > \frac{1}{t} - 8(\frac{1}{t})^2$ 在 $(8, +\infty)$ 上恒成立,

即 $2^b > [\frac{1}{t} - 8(\frac{1}{t})^2]_{\max}$ 即可,

令 $m = \frac{1}{t} \in (0, \frac{1}{8})$, 则 $y = -8m^2 + m$, $m \in (0, \frac{1}{8})$,

开口向下, 对称轴 $m = \frac{1}{16}$, 所以 $m = \frac{1}{16}$ 时, $y_{\max} = -8 \times \frac{1}{16^2} + \frac{1}{16} = \frac{1}{32} = 2^{-5}$,

所以 $2^b > 2^{-5}$, 解得 $b > -5$.

所以 b 的取值范围为 $(-5, +\infty)$.

【点评】本题考查换元法的应用及二次函数的性质的应用, 属于基础题.

21. 【分析】(I) ①取 $s=t=1$ 结合定义进行判断; ②根据 $f(s+t) - f(s) - f(t)$ 的结果进行判断;

(II) 分 $a=1$ 和 $0 \leq a < 1$ 两种情况, 根据定义结合对数运算以及对数函数单调性, 得到 $a=1$ 时, $f(x) \in B$, $0 \leq a < 1$ 时, $f(x) \notin B$, 再求出 a 的最小值;

(III) 根据定义直接证明充分性, 证明必要性成立时, 取 $g(x) = [x]$, 判断 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上的单调性, 由此推出矛盾完成证明.

【解答】解: (I) ①不是. 当 $s=t=1$ 时, $f(s+t) = f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$,

$$f(s) + f(t) = 3 + 3 = 6 > f(s+t),$$

所以 $f(x) = 2x+1$ 不是集合 B 中的元素;

$$\textcircled{2} \text{是. } \forall s, t \in (0, +\infty), f(s+t) - f(s) - f(t) = (s+t)^2 - s^2 - t^2 = 2st > 0,$$

所以 $f(x) = x^2$ 是集合 B 中的元素.

$$(II) \text{ 当 } a=1 \text{ 时, } \forall s, t \in (0, +\infty), f(s+t) = \log_{\frac{1}{2}}(s+t+1),$$

$$f(s) + f(t) = \log_{\frac{1}{2}}(s+1) + \log_{\frac{1}{2}}(t+1) = \log_{\frac{1}{2}}(s+1)(t+1),$$

$$\text{因为 } (s+1)(t+1) - (s+t+1) = st > 0, y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } f(s+t) \geq f(s) + f(t) \text{ 成立, 即 } f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \in B;$$

$$\text{若 } 0 \leq a < 1, \text{ 令 } s=t=\frac{1-a}{2} > 0, f(s+t) = \log_{\frac{1}{2}}(s+t+a),$$

$$f(s) + f(t) = \log_{\frac{1}{2}}(s+a) + \log_{\frac{1}{2}}(t+a) = \log_{\frac{1}{2}}(s+a)(t+a),$$

$$\text{因为 } (s+t+a) - (s+a)(t+a) = 1 - \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 > 0, y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } f(s+t) < f(s) + f(t), \text{ 因此 } f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+a) \notin B,$$

综上, a 的最小值为 1.

(III) 证明: 充分性: 因为 $f(x) \in A$, 所以 $\forall s, t \in (0, +\infty), s+t > s, f(s+t) \geq f(s)$,

则 $sf(s+t) \geq sf(s)$, 同理 $tf(s+t) \geq tf(t)$,

相加得 $(s+t)f(s+t) \geq sf(s) + tf(t)$, 即 $xf(x) \in B$, 所以充分性满足;

必要性: 设 $g(x) = [x]$, $\forall s, t \in (0, +\infty), [s]+[t] \leq [s+t]$,

$$\text{所以 } g(x) = [x] \in B, \text{ 此时 } f(x) = \frac{[x]}{x}, \text{ 当 } 1 < x < 2 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{x},$$

所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 因此 $f(x) = \frac{[x]}{x} \notin A$, 所以必要性不满足,

综上, $f(x) \in A$ 是 $g(x) \in B$ 的充分不必要条件.

【点评】 本题考查了元素与集合的关系, 函数的单调性与最值, 充分必要条件的证明, 考查了分类讨论思想和转化思想, 属难题.