



数 学

(考试时长: 120 分钟)

一、选择题 (每题 4 分, 共 10 题)

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle A =$ ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 下列函数中, 既是奇函数, 又在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是 ()

- A. $y = \sin x$ B. $y = -\cos x$
C. $y = \sin 2x$ D. $y = \tan(-x)$

3. 在下列函数中, 以 π 为周期的是 ()

- A. $y = \tan 2x$ B. $y = \sin x \cos x$
C. $y = |\sin 2x|$ D. $y = \sin x + \cos x$

4. 一个扇形的弧长为 $\frac{2\pi}{5}$, 面积为 $\frac{2\pi}{5}$, 则此扇形的圆心角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{5}$ D. $\frac{2\pi}{5}$

5. 将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将图象上各点的横坐标变为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 的解析式为 ()

- A. $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$
C. $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ D. $g(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos A =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ ”是“ $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 设函数 $f(x) = \frac{1}{\tan^2 x + 1}$, 则可断定函数 $f(x)$ ()

A. 最小正周期为 π , 奇函数, 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增

B. 最小正周期为 π , 偶函数, 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减

C. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 奇函数, 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增

D. 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$, 偶函数, 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分对应值如下表:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

且函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增, 则 $\varphi =$ ()

A. $-\frac{\pi}{6}$

B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $-\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{6}$

10. 设锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 且 $c=1, A=2C$, 则 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 ()

A. $(3, 2 + \sqrt{2}]$

B. $(3, 3 + \sqrt{3}]$

C. $(2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3})$

D. $(2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3}]$

二、填空题 (每题 5 分, 共 6 题)

11. 已知 $\cos 2\alpha = 1$, 则 $\sin \alpha =$ _____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{5}$, $b = 2$, $\cos A = \frac{1}{4}$, 则 $B =$ _____; 边 $c =$ _____.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以原点为顶点, 以 Ox 为始边, 它们的终边关于原点对称, 点 $M(x, -1)$ 在角 β 的终边上. 若 $\tan \beta = \frac{1}{3}$, 则 $x =$ _____; $\sin \alpha =$ _____.

14. 设函数 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x - 4\cos x$. 则 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$ _____; 函数 $f(x)$ 的最小值为_____.

15. 对于函数 $f(x)$, 满足“ $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(10-x) = f(x)$, $f(5+x) = -f(x)$ ”, 且 $f(3) = 1$, 则 $f(7) + f(9) + f(24) =$ _____.

16. 设 AB 是单位圆的一条直径, $\triangle ABC$ 的顶点 C 在该单位圆上, 延长 CB 到 D (B 在线段 CD), 使得

$CD = \sqrt{3}CB$ ，则 $CD + CA$ 的最大值为_____.

三、解答题（共五小题，共 80 分）

17. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sqrt{3}a \cos B = b \sin A$.

(1) 求 $\angle B$ 的大小；

(2) 若 $b = 6$ ， $a = 2\sqrt{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知函数 $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求证： $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$ ；

19. 在 $\triangle ABC$ 中， $2\sin^2 \frac{A}{2} + \cos(B + C) = 0$.

(1) 求 $\angle A$ 的大小；

(2) 若 $b = 2c$ ，求证： $\triangle ABC$ 为直角三角形.

20. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x \cos \omega x + \sqrt{3} \sin^2 \omega x + m (\omega > 0)$ ，在下列三个条件中，选择可以确定 ω 和 m 的值的两个条件作为已知.

条件①： $f(x)$ 的最小正周期为 π ；

条件②： $f(x)$ 的最大值与最小值之和为 0；

条件③： $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

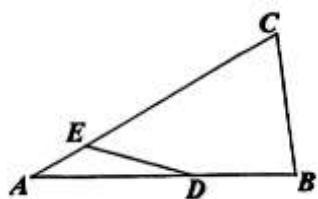
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值；

(3) 令 $g(x) = f(x) - m - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，若 $[g(x)]^2 - 2tg(x) - 3t \geq 0$ 在 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立，求实数 t 的取值范围.

21. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{6}$ ， $BC = \sqrt{7}$ ， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的点（不与端点重合），且

$DE = \sqrt{7}$ ．再从条件①、条件②、条件③



条件①： $AB = 3\sqrt{3}$ ；

条件②: $\cos B = \frac{\sqrt{21}}{14}$;

条件③: $CE = 4$.

中选择两个使得三角形存在且解唯一, 并求:

- (1) $\sin C$ 的值;
- (2) BE 的长度;
- (3) 四边形 $BCED$ 的面积.

参考答案

一、选择题（每题4分，共10题）

1. 【答案】D

【分析】根据 $A \in (0, \pi)$ 及特殊角的函数值得到答案.

【详解】因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $A = \frac{5\pi}{6}$.

故选：D

2. 【答案】A

【分析】根据给定条件，结合三角函数的奇偶性、单调性判断即得.

【详解】对于 A，函数 $y = \sin x$ 是奇函数，在 $(0, 1)$ 上单调递增，A 是；

对于 B，函数 $y = -\cos x$ 是偶函数，B 不是；

对于 C，函数 $y = \sin 2x$ 是奇函数，而当 $x = \frac{\pi}{4} \in (0, 1)$ 时， $y = \sin 2x$ 取最大值，

则 $y = \sin 2x$ 在 $(0, 1)$ 上不单调，C 不是；

对于 D，函数 $y = \tan(-x)$ 是奇函数，在 $(0, 1)$ 上单调递减，D 不是.

故选：A

3. 【答案】B

【分析】利用函数性质逐一确定周期.

【详解】对于 A： $y = \tan 2x$ 的周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，错误；

对于 B： $y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ，其周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，正确；

对于 C： $y = \sin 2x$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，则 $y = |\sin 2x|$ 的周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，错误；

对于 D： $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，其周期 $T = 2\pi$ ，错误.

故选：B.

4. 【答案】C

【分析】根据给定条件，利用扇形面积公式求出扇形所在圆半径，再利用弧长公式求解即得.

【详解】设扇形所在圆半径为 r ，于是 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{5} \times r = \frac{2\pi}{5}$ ，解得 $r = 2$ ，

所以此扇形的圆心角 $\alpha = \frac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{\pi}{5}$.

故选：C

5. 【答案】A

【分析】由题意利用 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象变换规律，得出结论.

【详解】将函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，可得 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；

再将图象上各点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

故选：A.

6. 【答案】C

【分析】根据给定条件，利用等腰三角形性质，借助二倍角公式计算即得.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，则 $A = \pi - 2B$ ，而 $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

所以 $\cos A = -\cos 2B = -(1 - 2\sin^2 B) = -1 + 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}$.

故选：C

7. 【答案】B

【分析】根据给定条件，利用充分条件、必要条件的定义 A 判断得解.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由 $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ ，得 B 为锐角， $\frac{\pi}{2} - B$ 为锐角，

当 A 为锐角时， $A = \frac{\pi}{2} - B$ ，即 $A + B = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ，

当 A 为钝角时， $\pi - A = \frac{\pi}{2} - B$ ，即 $A - B = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\angle C < \frac{\pi}{2}$ ，

因此命题“若 $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ ，则 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ”是假命题；

当 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ 时， $A + B = \frac{\pi}{2}$ ，有 $A = \frac{\pi}{2} - B$ ，则 $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ ，

所以“ $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ ”是“ $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ”的必要而不充分条件.

故选：B

8. 【答案】B

【分析】根据给定条件，利用奇偶函数定义、复合函数单调性，结合正切函数性质判断得解.

【详解】函数 $f(x) = \frac{1}{\tan^2 x + 1}$ 的定义域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ，

显然 $f(-x) = \frac{1}{\tan^2(-x) + 1} = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 是偶函数，排除 AC；

又 $f(x+\pi) = \frac{1}{\tan^2(x+\pi)+1} = \frac{1}{\tan^2 x+1} = f(x)$ ，即函数 $f(x)$ 的周期是 π ，

而 $f(0)=1$ ，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)$ 无意义，则 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $f(x)$ 的周期，因此 $f(x)$ 的最小周期是 π ，排除 D；

函数 $y = \tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增，且 $\tan x > 0$ ，则 $y = \tan^2 x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

所以函数 $f(x) = \frac{1}{\tan^2 x+1}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减，B 正确。

故选：B

9. 【答案】A

【分析】根据给定表格中数据，结合单调区间可得函数 $f(x)$ 图象的对称轴及对称中心，函数 $f(x)$ 的周期，再利用正弦函数的图象性质求解即得。

【详解】由函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调，得函数 $f(x)$ 的周期 $T \geq 2[\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{6})] = \frac{2\pi}{3}$ ，

又 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ，且 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ ，于是得 $f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{3}$ ，

又 $f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ ， $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ ，于是得 $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{7\pi}{12}, 0)$ ，

而 $\frac{3}{4}T \geq \frac{\pi}{2}$ ， $\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$ ，因此 $T = 4(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = \pi$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ ， $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ，

显然 $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，而 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ，则 $k = 0, \varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，

函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ ，当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 时， $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$ ，函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增，符合题意，

所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 。

故选：A

10. 【答案】C

【分析】首先求出角 C 的范围，利用二倍角的正弦公式和正弦定理得 $a = 2\cos C$ ，再利用正弦定理和三角恒等变换得 $b = 4\cos^2 C - 1$ ，最后得到周长表达式，再利用二次函数的性质即可得到范围。

【详解】因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < B < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < C < \frac{\pi}{2}$ ，

即 $0 < 2C < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \pi - C - 2C < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < C < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4}$ ， $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos C < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；

又因为 $A = 2C$ ，所以 $\sin A = 2\sin C \cos C$ ，又因为 $c = 1$ 和正弦定理得 $a = 2\cos C$ ，

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{b}{\sin B} &= \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sin(\pi - 3C)}{\sin C} = \frac{\sin 3C}{\sin C} = \frac{\sin C \cos 2C + \cos C \sin 2C}{\sin C} \\ &= \frac{\sin C(2\cos^2 C - 1) + \cos C \cdot 2\sin C \cos C}{\sin C} = 4\cos^2 C - 1, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a + b + c = 4\cos^2 C + 2\cos C, \text{ 令 } t = \cos C, \text{ 则 } t \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{又因为函数 } y = 4t^2 + 2t \text{ 在 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 上单调递增, 所以函数值域为 } (2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3}),$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的周长的取值范围为 } (2 + \sqrt{2}, 3 + \sqrt{3}).$$

故选: C.

【点睛】关键点睛: 本题解题关键是利用正弦定理实现边角转化得到 $\triangle ABC$ 周长关于角 C 的函数关系, 借助二次函数的单调性求最值.

二、填空题 (每题 5 分, 共 6 题)

11. 【答案】 0

【分析】根据二倍角的余弦公式求解即可.

【详解】 $\because \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1, \therefore \sin^2 \alpha = 0$, 即 $\sin \alpha = 0$.

故答案为: 0.

12. 【答案】 ①. $\frac{\pi}{3}$ ②. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【分析】先利用正弦定理求 B , 再用余弦定理求 c .

【详解】因为 $\cos A = \frac{1}{4}$, 则 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{所以 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 得 } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $a > b$, 所以 $A > B$,

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{由余弦定理 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + c^2 - 5}{4c} = \frac{1}{4},$$

$$\text{解得 } c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ 负值舍去.}$$

故答案为: $\frac{\pi}{3}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13. 【答案】 ①. -3 ②. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【分析】根据给定信息, 利用正切函数的定义求出 x , 再利用正弦函数的定义求出 $\sin \alpha$.

【详解】依题意, $\tan \beta = \frac{-1}{x} = \frac{1}{3}$, 解得 $x = -3$, 因此 $M(-3, -1)$, 角 α 的终边过点 $M'(3, 1)$,

于是 $|OM'| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

故答案为: -3; $\frac{\sqrt{10}}{10}$

14. 【答案】 ①. $-\frac{9}{4}$ ②. $-\frac{7}{3}$ ## $-2\frac{1}{3}$

【分析】先化简, 然后计算 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 换元, 然后利用二次函数的性质求 $f(x)$ 最值.

【详解】 $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x - 4\cos x = 2(2\cos^2 x - 1) + 1 - \cos^2 x - 4\cos x$

$= 3\cos^2 x - 4\cos x - 1$,

则 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{9}{4}$,

令 $\cos x = t, t \in [-1, 1]$,

则 $f(x) = g(t) = 3t^2 - 4t - 1$, 对称轴为 $x = \frac{2}{3}$,

故最小值为 $g\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{2}{3} - 1 = -\frac{7}{3}$.

故答案为: $-\frac{9}{4}; -\frac{7}{3}$.

15. 【答案】 1

【分析】确定函数周期性, 然后赋值求解.

【详解】因为 $f(x) = -f(5+x) = f(x+10)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 10,

当 $x = 3$ 时, 由 $f(10-x) = f(x)$ 得 $f(7) = f(3) = 1$

当 $x = 9$ 时, 由 $f(5+x) = -f(x)$ 得 $f(9) = -f(5+9)$, 即 $f(9) + f(14) = 0$,

又 $f(14) = f(24)$,

所以 $f(9) + f(24) = 0$,

所以 $f(7)+f(9)+f(24)=1$.

故答案为: 1

16. 【答案】 4

【分析】由题意得到 $CA^2+CB^2=4$, 根据边 CA 和 CB 的范围可设 $CA=2\sin\alpha$, $CB=2\cos\alpha$, 其中 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 转化为三角函数求最大值即可.

【详解】 $\because AB$ 是单位圆的一条直径, $\triangle ABC$ 的顶点 C 在该单位圆上,

$$\therefore CA\perp CB, \therefore CA^2+CB^2=4,$$

$$\therefore CA\in(0,2), CB\in(0,2),$$

$$\text{故可设 } CA=2\sin\alpha, CB=2\cos\alpha, \text{ 其中 } \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{则 } CD+CA=\sqrt{3}CB+CA=2\sqrt{3}\cos\alpha+2\sin\alpha=4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), \therefore \alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right), \therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right],$$

$$\therefore CD+CA\in(2,4],$$

$$\therefore CD+CA \text{ 的最大值为 } 4.$$

故答案为: 4.

三、解答题 (共五小题, 共 80 分)

17. 【答案】 (1) $\frac{\pi}{3}$;

$$(2) 6\sqrt{3}.$$

【分析】(1) 根据给定条件, 利用正弦定理边化角求出 $\tan B$ 即可得解.

(2) 由 (1) 的结论, 利用正弦定理求出 A , 再利用三角形面积公式求解即得.

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$ 及正弦定理定理, 得 $\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$,

而 $\sin A>0$, 则 $\tan B=\sqrt{3}$, 又 $0<B<\pi$,

$$\text{所以 } B=\frac{\pi}{3}.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $B=\frac{\pi}{3}$, 而 $b=6$, $a=2\sqrt{3}$,

由正弦定理得 $\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{1}{2}$ ，而 $a < b$ ，则 $A < B$ ，于是 $A = \frac{\pi}{6}$ ， $C = \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 6\sqrt{3}$ 。

18. 【答案】(1) $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 直接根据正切函数的性质求定义域；

(2) 利用三角公式变形证明。

【小问 1 详解】

令 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，得 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

即 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ ；

【小问 2 详解】

$$\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{2}, k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}.$$

19. 【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos(B+C) = -\cos A$ ，结合降幂公式，化简即可得到答案；

(2) 利用余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ ，结合 $b = 2c$ ，化简即可求证。

【小问 1 详解】

由于在 $\triangle ABC$ 中， $B+C = \pi - A$ ，则 $\cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$ ，

所以 $2\sin^2 \frac{A}{2} + \cos(B+C) = 0$ ，可化简为： $2 \times \frac{1 - \cos A}{2} - \cos A = 0$ ，即 $\cos A = \frac{1}{2}$ ，

因为 $A \in (0, \pi)$ ，所以 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 。

【小问 2 详解】

由(1)知 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 根据余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$,

由于 $b = 2c$, 则 $a^2 = 4c^2 + c^2 - 2c^2 = 3c^2$, 所以 $b^2 = a^2 + c^2$, 则 $\triangle ABC$ 是以 $\angle B$ 为直角的直角三角形.

20. 【答案】(1) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$;

(2) 1; (3) $t \leq \frac{1}{16}$.

【分析】(1) 由条件①②③分别求出参数, 再确定选择的两个条件求出函数解析式.

(2) 由(1)的结论, 利用正弦函数的性质求出最大值.

(3) 由(1)求出 $g(x)$ 及在指定区间上的值域, 由不等式分离参数, 用换元法后结合函数的单调性求出最值得 t 的范围.

【小问1详解】

依题意, 函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2\omega x + \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos 2\omega x}{2} + m = \sin(2\omega x - \frac{\pi}{3}) + m + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

条件①, $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 1$;

条件②, $(1 + m + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-1 + m + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$, 解得 $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

条件③, $\sin(-\frac{\pi}{3}) + m + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

显然选择条件①②或①③可以确定 ω 和 m 的值,

选择条件①②, $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

选择条件①③, $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

【小问2详解】

由(1)知 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

则当 $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x)_{\max} = 1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值为 1.

【小问3详解】

由(1)知 $g(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - (-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$, $g(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, 由 $[g(x)]^2 - 2tg(x) - 3t \geq 0$, 得 $t \leq \frac{[g(x)]^2}{2g(x) + 3}$,

令 $p = 2g(x) + 3$, $p \in [4, 5]$, 则 $t \leq \frac{1}{4}(p + \frac{9}{p} - 6)$, 显然函数 $y = p + \frac{9}{p} - 6$ 在 $[4, 5]$ 上单调递增,

因此当 $p = 4$ 时, $\frac{1}{4}(p + \frac{9}{p} - 6)$ 取得最小值 $\frac{1}{16}$, 则 $t \leq \frac{1}{16}$,

所以实数 t 的取值范围是 $t \leq \frac{1}{16}$.

21. 【答案】(1) $\frac{3\sqrt{21}}{14}$;

(2) $\sqrt{19}$;

(3) $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

【分析】(1) 选条件①③, 利用余弦定理结合已知判断并求 $\sin C$ 的值; 选条件②③, 利用同角公式及和角的正弦、正弦定理判断并求 $\sin C$ 的值; 选条件①②, 由正弦定理判定三角形解的情况即得.

(2) 由 (1) 的结论, 利用余弦定理求出 BE .

(3) 由 (1) 的结论, 求出 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ 的面积, 作差可得出四边形 $BCED$ 的面积.

【小问 1 详解】

选条件①③, $AB = 3\sqrt{3}$, $CE = 4$, 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{6}$, $BC = \sqrt{7}$,

由余弦定理得 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos A$, 即 $7 = AC^2 + 27 - 9AC$,

整理得 $AC^2 - 9AC + 20 = 0$, 解得 $AC = 4$ 或 $AC = 5$, 而 $AC > CE = 4$, 则 $AC = 5$,

于是 $\triangle ABC$ 存在且唯一, 由正弦定理得 $\sin C = \frac{AB \sin A}{BC} = \frac{3\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$.

选条件②③, $\cos B = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $CE = 4$, 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{6}$, $BC = \sqrt{7}$,

则 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, 由正弦定理得 $AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{7} \times \frac{5\sqrt{7}}{14}}{\frac{1}{2}} = 5 > CE$,

$\sin C = \sin(B + A) = \sin B \cos A + \cos B \sin A = \frac{5\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$,

由正弦定理得 $AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{\sqrt{7} \times \frac{3\sqrt{21}}{14}}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$, 于是 $\triangle ABC$ 存在且唯一,

因此 $\sin C = \frac{3\sqrt{21}}{14}$.

选条件①②, $AB=3\sqrt{3}$, $\cos B=\frac{\sqrt{21}}{14}$, 在 $\triangle ABC$ 中, $A=\frac{\pi}{6}$, $BC=\sqrt{7}$,

由余弦定理得, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B}=\sqrt{27+7-2\times 3\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{14}}=5$,

此时 $\cos A=\frac{(3\sqrt{3})^2+5^2-(\sqrt{7})^2}{2\times 3\sqrt{3}\times 5}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A=\frac{\pi}{6}$, 符合题意, 即 $\triangle ABC$ 存在且唯一,

由 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的点 (不与端点重合), 知点 D 位置不确定, 保证 $DE=\sqrt{7}$ 的点 E 不能确定,

因此 $\triangle ADE$ 不能确定, 即不符合题意.

【小问 2 详解】

由 (1) 知, $\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$, $AC=5$, $AB=3\sqrt{3}$, 在 $\triangle ABE$ 中, $AE=1$,

由余弦定理得 $BE=\sqrt{AE^2+AB^2-2AE\cdot AB\cos A}=\sqrt{1+27-2\times 1\times 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{19}$.

【小问 3 详解】

由 (1) 知 $AC=5$, $AB=3\sqrt{3}$, 而 $A=\frac{\pi}{6}$, 则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin A=\frac{15\sqrt{3}}{4}$,

在 $\triangle ADE$ 中, $AE=1$, $DE=\sqrt{7}$, 由余弦定理得 $DE^2=AE^2+AD^2-2AE\cdot AD\cos A$,

即 $7=1+AD^2-2\cdot AD\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, 整理得 $AD^2-\sqrt{3}AD-6=0$, 解得 $AD=2\sqrt{3}$,

$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot AD\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以四边形 $BCED$ 的面积为 $S=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE}=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.