2024 北京北师大附中高二 2 月月考

数　　学

一、选择题：本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程是（　）

A. $x=-\frac{1}{2}$　　B. $y=-\frac{1}{2}$　　C. $x=-1$　　D. $y=-1$

2．已知 P 为双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 右支上一点，F_1,F_2 为双曲线的左右焦点，$|PF_1|-|PF_2|$ 等于（　）

A．8　B．6　C．4　D．3

3. 设 m，n 是两条不同的直线，α 是一个平面，则下列命题中正确的是（　）

A. 若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$　　B. 若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m\perp n$

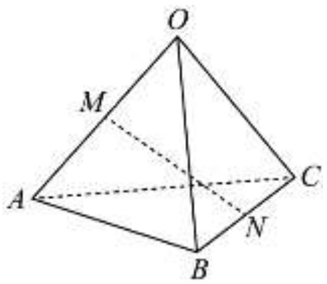
C. 若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n//\alpha$　　D. 若 $m//\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\alpha$

4. 已知直线 $l:y=x-8$.则下列结论正确的是（　）

A. 点 $(2,6)$ 在直线 l 上　　B. 直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$

C. 直线 l 在 y 轴上的截距为 8　　D. 直线 l 的一个方向向量为 $\vec{v}=(1,-1)$

5. 在四面体 $OABC$ 中记 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，若点 M、N 分别为棱 OA、BC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$（　）



A $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　B. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

C $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

6. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线经过点 $(1,\sqrt{3})$，则双曲线的离心率为（　）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 若直线 l_1：$ax+3y+1=0$ 与 l_2：$2x+(a+1)y+1=0$ 互相平行，则 a 的值是（　）

A. -3　　B. 2

C. -3 或 2　　D. 3 或 -2

8. 已知 $\vec{a}=\left(1,2,-y\right)$，$\vec{b}=\left(x,1,2\right)$，且 $2\vec{b}//\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，则（　）

A. $x=\frac{1}{3}$，$y=1$　　B. $x=\frac{1}{2}$，$y=-4$

C. $x=2$，$y=-\frac{1}{4}$　　D. $x=1$，$y=-1$

9. 已知直线 l：$kx-y+1-k=0$ 和圆 C：$x^2+y^2-4x=0$，则直线 l 与圆 C 的位置关系为（　）

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

10. 已知直线 $ax-y-1=0$ 和直线 $2x+4y+1=0$ 互相垂直，则 a 的值是______.

11. 圆心为 $\left(2,1\right)$ 且和 x 轴相切的圆的方程是______.

12．若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线经过双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左焦点，则 $p=$__________.

13. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，点 A 是抛物线 C 上一点，$AD\perp l$ 于 D．若 $AF=2$，$\angle DAF=60^\circ$，则抛物线 C 的方程为______.

14. 关于曲线 $C:x^2+y^2=|x|+|y|$，给出下列四个结论：

①曲线 C 关于原点对称，也关于 x 轴、y 轴对称；

②曲线 C 围成的面积是 $\pi+2$；

③曲线 C 上任意一点到原点的距离者不大于 $\sqrt{2}$；

④曲线 C 上　点到原点的距离的最小值为 1.

其中，所有正确结论的序号是______.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

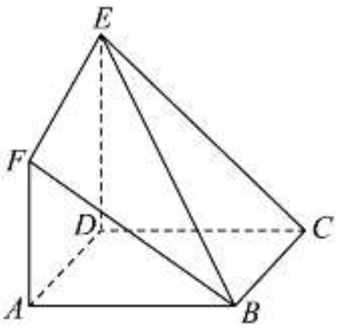
15. 已知圆 $C_1:(x-1)^2+(y-2)^2=9$，圆 $C_2:x^2+y^2+4x+4y+4=0$，直线 $l:x-y-3=0$.

（1）求圆心 C_1 到直线 l 的距离；

（2）已知直线 l 与圆 C_1 交于 M，N 两点，求弦 $|MN|$ 的长；

（3）判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系.

16. 如图所示，在多面体 $ABCDEF$ 中，梯形 $ADEF$ 与正方形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AF // DE$，$DE \perp AD$，$AF = AD = \frac{1}{2}DE = 2$.



（1）求证：$BF //$ 平面 CDE；

（2）求证：$EF \perp$ 平面 CDF；

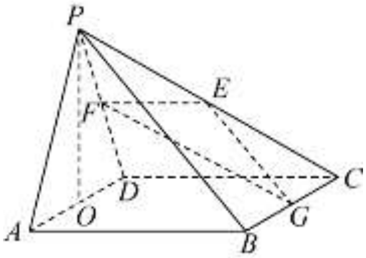
（3）若点 H 在线段 DE 上，且 $EH = 1$，求异面直线 AH 与 BE 所成角的余弦值.

17. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 长轴长是焦距的 2 倍，点 F 是椭圆的右焦点，且点 $P\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 在椭圆上，直线 $l: y = k(x+1)(k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）当 $k = 1$ 时，求 $\triangle ABF$ 的面积；

18. 已知在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为4的正方形，$\triangle PAD$是正三角形，E、F、G、O分别是PC、PD、BC、AD的中点.再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个条件作为已知.条件①：$CD\perp$平面PAD；条件②：$PC=4\sqrt{2}$；条件③：平面$PAD\perp$平面$ABCD$.



（1）求证：$PO\perp$平面$ABCD$；

（2）求平面EFG与平面$ABCD$所成锐二面角的大小；

（3）在线段PA上是否存在点M，使得直线GM与平面EFG所成角为$\dfrac{\pi}{6}$，若存在，求线段PM的长度；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【解析】

【分析】由抛物线的方程直接求解准线方程即可.

【详解】解：由抛物线 $y^2=2x$，可得其准线方程是 $x=-\frac{1}{2}$.

故选：A.

2.【答案】B

【解析】

【分析】根据递推关系求得 a_3.

【详解】$a_1=2, a_2=a_1+3=5, a_3=a_2+3=8$.

故选：B

3.【答案】A

【解析】

【分析】根据空间线线、线面、面面位置关系有关知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】A 选项，根据线面垂直的定义可知，若 $m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\perp n$，A 选项正确.

B 选项，若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 m,n 可能平行，所以 B 选项错误.

C 选项，若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 n 可能含于平面 α，所以 C 选项错误.

D 选项，若 $m//\alpha$，$m\perp n$，则 n 可能含于平面 α，所以 D 选项错误.

故选：A

4.【答案】B

【解析】

【分析】逐个分析各个选项.

【详解】对于 A 项，当 $x=2$，$y=6$ 时， 代入直线方程后得 $6\neq 2-8$，$\therefore$ 点 $(2,6)$ 不在直线 l 上，故 A 项错误；

对于 B 项，设直线 l 的倾斜角为 θ，$\because k=1$，$\therefore \tan\theta=1$，又 $\because \theta\in[0,\pi)$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$，故 B 项正确；

对于 C 项，令 $x=0$ 得：$y=-8$，$\therefore$ 直线 l 在 y 轴上的截距为 -8，故选项 C 错误；

对于 D 项，$\because$ 直线 l 的一个方向向量为 $\vec{v}=(1,-1)$，$\therefore k=\frac{-1}{1}=-1$，这与已知 $k=1$ 相矛盾，故选项 D 错误.

故选：B.

5.【答案】B

【解析】

【分析】根据空间向量的线性运算，即得.

【详解】由题意得：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：B.

6.【答案】D

【解析】

分析】先求出渐近线方程，代入点$\left(1,\sqrt{3}\right)$化简求解.

【详解】$\because$双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为：$y=\pm\frac{b}{a}x$，点$\left(1,\sqrt{3}\right)$在一条渐近线上即

$\sqrt{3}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=3\Rightarrow\frac{c^2-a^2}{a^2}=3\Rightarrow e^2-1=3\therefore e=2$

故选：D

7.【答案】A

【解析】

【分析】根据直线l_1：$ax+3y+1=0$与l_2：$2x+\left(a+1\right)y+1=0$互相平行，由$a\left(a+1\right)=2\times3$求解.

【详解】因为直线l_1：$ax+3y+1=0$与l_2：$2x+\left(a+1\right)y+1=0$互相平行，

所以$a\left(a+1\right)=2\times3$，即$a^2+a-6=0$，

解得$a=-3$或$a=2$，

当$a=-3$时，直线l_1：$3x-3y+1=0$，l_2：$2x-2y+1=0$，互相平行；

当$a=2$时，直线l_1：$2x+3y+1=0$，l_2：$2x+3y+1=0$，重合；

所以$a=-3$，

故选：A

8.【答案】B

【解析】

【分析】利用向量平行的充要条件列出关于x、y的方程组，解之即可求得x、y的值.

【详解】$\vec{a}=\left(1,2,-y\right)$，$\vec{b}=\left(x,1,2\right)$，

则$\vec{a}-\vec{b}=\left(1-x,1,-y-2\right)$，$2\vec{b}=\left(2x,2,4\right)$

由$2\vec{b}//\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$，可得$\begin{cases}2\left(1-x\right)-2x=0\\4\left(1-x\right)-2x\left(-y-2\right)=0\end{cases}$，解之得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=-4\end{cases}$

故选：B

9.【答案】A

【解析】

【分析】

求出直线过的定点 P 坐标，确定定点在圆内，则可判断.

【详解】直线方程整理为 $k(x-1)-y+1=0$，即直线过定点 $P(1,1)$，

而 $1^2+1^2-4\times1=-2<0$，P 在圆 C 内，

$\therefore$ 直线 l 与圆 C 相交.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：本题考查直线与圆的位置关系．关键点有两个：一是确定动直线所过定点坐标，二是确定点到圆的位置关系：圆 C 的一般方程为 $f(x,y)=x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，点 $P(x_0,y_0)$，则

$f(x_0,y_0)<0 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆 C 内，$f(x_0,y_0)=0 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆 C 上，

$f(x_0,y_0)>0 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆 C 外.

10.【答案】C

【解析】

【分析】根据选项 A，可得点 P 在 CC_1 上运动，当点 P 运动到点 C_1 时，$\triangle ABP$ 的面积取得最大值，则

$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC_1}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，判断选项 A；

根据选项 B，可得点 P 在 B_1C_1 上运动，则 $V_{P-A_1BC}=V_{A_1-BPC}$，判断选项 B；

设 BC 的中点为 M，B_1C_1 的中点为 N，根据选项 C，可得点 P 在 B_1C_1 上运动，则点 P 在 MN 上运动，可证得 $A_1P\perp$ 面 BCC_1B_1，即可判断选项 C；

建立空间直角坐标系，设出点 P 的坐标，求得出点 P 的坐标，即可判断选项 D.

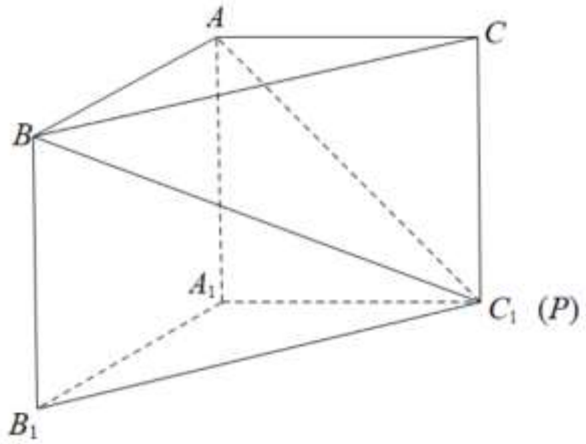
【详解】当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,则点 P 在 CC_1 上运动，则当点 P 与 C_1 重合时，则此时面积取得最大值，$AC_1=\sqrt{AC^2+CC_1^2}=\sqrt{2}$,由于直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，则 $AB\perp AA_1$，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 则 $AB\perp AC$，$AC\cap AA_1=A, AC, AA_1\subset$ 面 ACC_1A_1

则 $AB\perp$ 面 ACC_1A_1

$\because AC_1\subset$ 面 ACC_1A_1

$AB\perp AC_1$

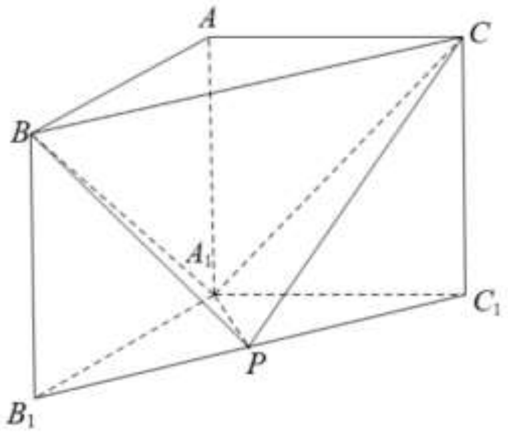
则 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC_1}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故选项 A 正确；



当 $\mu=1$ 时，则 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$，点 P 在 B_1C_1 上运动，则 $V_{P-A_1BC}=V_{A_1-BPC}$，

由于点 A_1 到平面 BPC 的距离为定值 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 P 到线段 BC 的距离恒为1

则 $S_{\triangle BCP}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则 $V_{P-A_1BC}=V_{A_1-BPC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{6}$，故选项 B 正确；

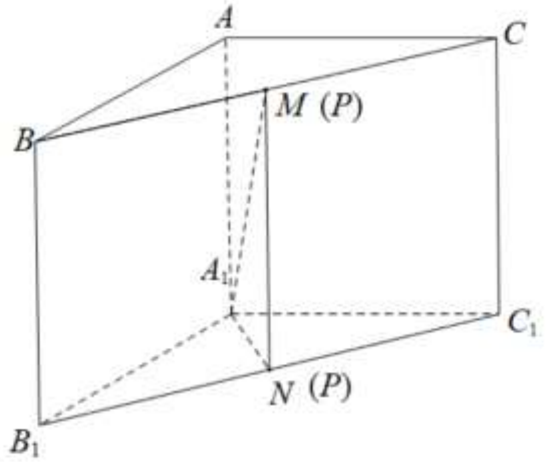


当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,设 BC 的中点为 M，B_1C_1 的中点为 N，则点 P 在 MN 上运动，当点 P 与点 M 重合时，$BM\perp MN, BM\perp A_1N$，

则 $BM\perp$ 面 A_1MN，则 $BM\perp A_1P$

当点 P 与点 N 重合时，$A_1N\perp$ 面 BCC_1B_1，即 $A_1P\perp$ 面 BCC_1B_1，

则 $A_1P\perp BP$,故选项 C 错误；



如图建立空间直角坐标系，设 BB_1 的中点为 H，CC_1 的中点为 G，当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，则

点 P 在线段 HG 上运动，$A_1(0.0.0),B(1,0,1),A(0,0,1),B_1(1,0,0),P\left(a,1-a,\frac{1}{2}\right)$

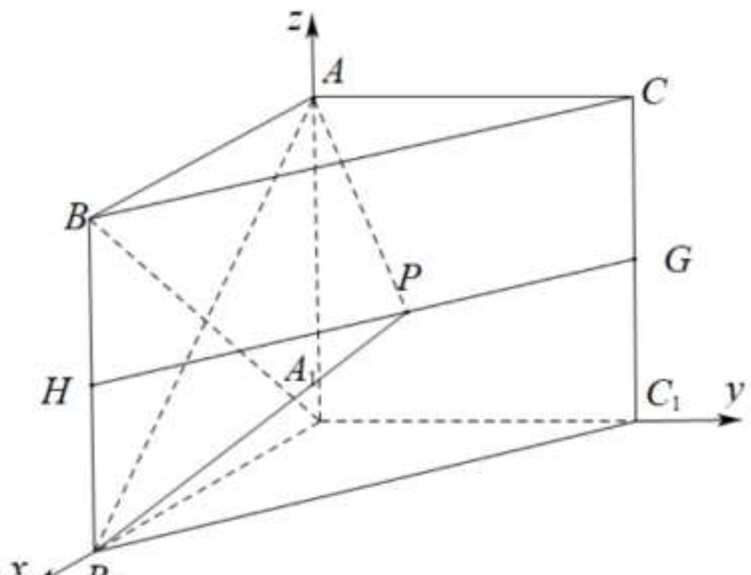
$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,1),\overrightarrow{AB_1}=(1,0,-1)\overrightarrow{AP}=\left(a,1-a,-\frac{1}{2}\right)$

设平面 APB_1 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$.

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{m}=x-z=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}=ax+(1-a)y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=\left(1,\frac{\frac{1}{2}-a}{1-a},1\right)$

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，则 $\overrightarrow{A_1B}$ 与 $\vec{m}$ 平行，则存在点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P，故选项 D 正确.

故选：C.



【点睛】思路点睛：用向量方法解决立体几何问题，树立“基底”意识，利用基向量进行线性运算，要理

解空间向量概念、性质、运算，注意和平面向量类比. .

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】2

【解析】

【分析】根据直线垂直列方程，由此求得 a 的值.

【详解】由于两条直线垂直，

所以 $a\times 2+(-1)\times 4=2a-4=0, a=2$.

故答案为：2

12.【答案】$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

【解析】

【分析】根据圆的切线性质进行求解即可.

【详解】因为该圆与 x 轴相切，

所以该圆的半径为1，

因此圆的方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，

故答案为：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

13.【答案】 ①. 3 ②. 3

【解析】

【分析】利用 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1\\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2\end{cases}$ 求得 a_n，进而求得正确答案.

【详解】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$，

当 $n\geq 2$ 时，由 $S_n=n^2+3$ 得 $S_{n-1}=(n-1)^2+3$，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1$，

所以 $a_n=\begin{cases}4, n=1\\ 2n-1, n\geq 2\end{cases}$，

所以 $a_2=2\times 2-1=3$，

由于 $n\geq 2$ 时，$a_n=2n-1$，$\{a_n\}$ 是递增数列，$a_2=3<a_1$，

所以 a_n 的最小值为3.

故答案为：3；3

14.【答案】$y^2=2x$

【解析】

【分析】根据抛物线的定义可得 $AD=2$，然后在直角三角形中利用 $\angle DAF=60^\circ$ 可得 p，从而可得答案.

【详解】根据抛物线的定义可得 $AD=AF=2$，

又$\angle DAF=60^{\circ}$，所以$AD-p=\frac{1}{2}AF$，得$p=1$，

所以抛物线的方程为$y^2=2x$.

故答案　：$y^2=2x$.

15.【答案】①②③④

【解析】

【分析】画出曲线C的图象，根据对称性、面积、图象等知识确定正确答案.

【详解】曲线$C:x^2+y^2=|x|+|y|$，

则$x\geq 0,y\geq 0$时，$x^2+y^2=x+y,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

$x<0,y\geq 0$时，$x^2+y^2=-x+y,\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

$x\geq 0,y<0$时，$x^2+y^2=x-y,\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

当$x<0,y<0$时，$x^2+y^2=-x-y,\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

由此画出曲线C的图象如下图所示，

由图可知：

曲线C关于原点对称，也关于x轴、y轴对称，①正确.

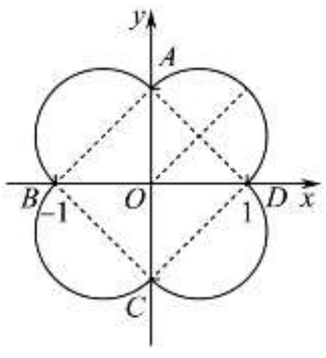
曲线C围成的面积是$4\times\left(\frac{1}{2}\times\pi\times\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\pi+2$，②正确.

曲线C上任意一点到原点的距离者不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，③正确

曲线C上的点到原点的距离的最小值为1，即$|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=1$，

所以④正确.

故答案为：①②③④



三、解答题：本大题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$a_n=3n-15$

（2）$3-3^{n+1}$

【解析】

【分析】（1）由$\begin{cases}a_1+d=-9\\a_1+4d=0\end{cases}$得出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）先由$\frac{b_2}{b_1}$得出公比，再由求和公式计算即可.

【小问1详解】

因为$a_2=-9$，$a_5=0$，所以$\begin{cases}a_1+d=-9\\a_1+4d=0\end{cases}$，解得$a_1=-12,d=3$.

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-12+3(n-1)=3n-15$.

【小问2详解】

设公比为q，因为$b_2=a_2+a_3+a_4=-9-6-3=-18$，所以$q=\frac{b_2}{b_1}=3$，所以数列$\{b_n\}$的前$n$项和为

$$S_n=\frac{-6\left(1-3^n\right)}{1-3}=3-3^{n+1}.$$

17.【答案】（1）$2\sqrt{2}$

（2）2

（3）外切

【解析】

【分析】（1）利用点到直线的距离公式求得正确答案.

（2）根据弦长公式求得正确答案.

（3）根据圆心距与两圆半径的关系确定两圆的位置关系.

【小问1详解】

圆C_1的圆心为$C_1(1,2)$，半径$r_1=3$.

圆C_2的方程可化为$(x+2)^2+(y+2)^2=4$，

所以圆心为$C_2(-2,-2)$，半径$r_2=2$.

所以圆心C_1到直线l　距离为$d=\frac{|1-2-3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

【小问2详解】

$|MN|=2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{9-8}=2$.

【小问3详解】

$\left|C_1C_2\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5=r_1+r_2$，所以两圆外切.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析　（3）$\frac{4\sqrt{78}}{39}$

【解析】

【分析】（1）首先根据面面平行的判定证明平面 ABF // 平面 CDE，再根据面面平行的性质即可得到答案.

（2）首先取 ED 的中点 G，连接 FG，易证 $EF\perp FD$，$CD\perp EF$，再利用线面垂直的判定即可证明 $EF\perp$平面CDF.

（3）首先以 D 为原点，DA,DC,DE 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，再利用空间向量法求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $AF\not\subset$平面CDE；$DE\subset$平面CDE；AF // DE，

所以 AF // 平面CDE.

因为 $AB\not\subset$平面CDE；$CD\subset$平面CDE；AB // CD，

所以 AB// 平面CDE.

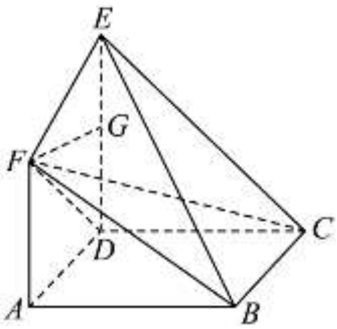
又因为 $AF\subset$平面ABF，$AB\subset$平面ABF，$AF\cap AB=A$，

所以平面 ABF // 平面CDE；

又因为 $BF\subset$平面ABF，所以 BF // 平面CDE.

【小问 2 详解】

取 ED 的中点 G，连接 FG，如图所示：



因为四边形 $ADEF$ 为梯形，且 $DE\perp AD$，$AF=AD=\frac{1}{2}DE=2$，

所以四边形 $ADGF$ 为正方形，$FG\perp ED$，$FG=EG=2$.

所以 $EF=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$FD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

即 $EF^2+FD^2=ED^2$，$EF\perp FD$.

又因为平面 $ADEF\perp$平面$ABCD=AD$，且 $CD\subset$平面$ABCD$，$CD\perp AD$，

所以 $CD\perp$平面$ADEF$.

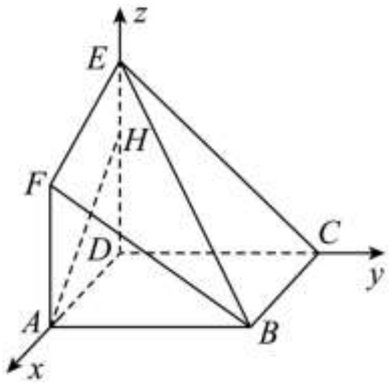
又因为 $EF\subset$平面$ADEF$，所以 $CD\perp EF$.

因为 $EF\perp CD$， $EF\perp FD$， $CD\cap FD=D$， $CD,FD\subset$ 平面 CDF，

所以 $EF\perp$ 平面 CDF．

【小问3详解】

以 D 为原点， DA,DC,DE 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



$A(2,0,0)$， $H(0,0,3)$， $B(2,2,0)$， $E(0,0,4)$，

$\overrightarrow{AH}=(-2,0,3)$， $\overrightarrow{BE}=(-2,-2,4)$，

设异面直线 AH 与 BE 所成角 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BE}\right|}{\left|\overrightarrow{AH}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|}=\dfrac{16}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{4+4+16}}=\dfrac{4\sqrt{78}}{39}$．

所以异面直线 AH 与 BE 所成角的余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{78}}{39}$．

19.【答案】（1） $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2） $\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$

（3）是，定值为8，证明见解析

【解析】

【分析】（1）由 a、b、c 关系及点在椭圆上建立方程组即可解得参数；

（2） $S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}\times\left|F_1F\right|\times\left|y_A-y_B\right|$，联立直线与椭圆方程，结合韦达定理即可求.

（3）判断直线恒过左焦点，由椭圆定义可得周长为定值.

【小问1详解】

长轴长是焦距的2倍，则 $a=2c$，则 $b^2=a^2-c^2=3c^2$，

$\therefore$ 椭圆为 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，代入点 $P\left(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 得 $\dfrac{2}{4c^2}+\dfrac{\frac{6}{4}}{3c^2}=1$，解得 $c^2=1$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

$k=1$，则直线为 $y=x+1$，过椭圆左焦点 $F_1\left(-1,0\right)$，右焦点为 $F\left(1,0\right)$.

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=x+1\end{cases}$ 得 $7x^2+8x-8=0$，$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{8}{7},\ x_1x_2=-\dfrac{8}{7}$，

$y_1+y_2=x_1+1+x_2+1=\dfrac{6}{7}$，$y_1y_2=x_1+x_2+x_1x_2+1=-\dfrac{9}{7}$.

$\therefore \left|y_1-y_2\right|=\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$.

$\therefore S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}\times\left|F_1F\right|\times\left|y_1-y_2\right|=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$.

【小问 3 详解】

$\triangle ABF$ 的周长为定值，理由如下：

直线 l 恒过椭圆左焦点 $F_1\left(-1,0\right)$，由椭圆定义可知 $\triangle ABF$ 的周长为

$\left|F_1A\right|+\left|FA\right|+\left|F_1B\right|+\left|FB\right|=2a+2a=8$.

20.【答案】(1) 证明见解析；

(2) $\dfrac{\pi}{3}$

(3) 答案见解析.

【解析】

【分析】(1) 选条件①：$CD\perp$ 平面 PAD，利用面面垂直的判定定理得到平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，再由 $PO\perp AD$，利用面面垂直的性质定理证明； 选条件②：$PC=4\sqrt{2}$，由 $PD^2+CD^2=PC^2$，得到 $CD\perp PD$，又 $CD\perp AD$，得到 $CD\perp$ 平面 PAD，然后利用面面垂直的判定定理得到平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，再由 $PO\perp AD$，利用面面垂直的性质定理证明； 选条件③：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，由 $PO\perp AD$，利用面面垂直的性质定理证明；

(2) 由 (1) 建立空间直角坐标系，求得平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(x,y,z\right)$，易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(0,0,1\right)$，由 $\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$ 求解；

(3) 设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\lambda\in\left[0,1\right]$，得到 $\overrightarrow{GM}=\left(2\lambda,-4,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right)$，由 (2) 知平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(3,0,\sqrt{3}\right)$，由 $\left|\cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{GM}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{GM}\right|}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\overrightarrow{GM}\right|}=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ 求解.

【小问 1 详解】

证明：选条件①：$CD\perp$ 平面 PAD，

又$CD \subset$平面$ABCD$,

所以平面$PAD \perp$平面$ABCD$,

因为$\triangle PAD$是正三角形，且O是AD的中点，

所以$PO \perp AD$，又平面$APD \cap$平面$ABCD=AD$，$PO \subset$平面APD

所以$PO \perp$平面$ABCD$；

选条件②：$PC = 4\sqrt{2}$；

因为$PD = CD = 4$，所以$PD^2 + CD^2 = PC^2$，

则$CD \perp PD$，又$CD \perp AD$，且$PD \cap AD=D$，

所以$CD \perp$平面PAD，

又$CD \subset$平面$ABCD$,

所以平面$PAD \perp$平面$ABCD$,

因为$\triangle PAD$是正三角形，且O是AD的中点，

所以$PO \perp AD$，又平面$APD \cap$平面$ABCD=AD$，$PO \subset$平面APD

所以$PO \perp$平面$ABCD$；

选条件③：平面$PAD \perp$平面$ABCD$.

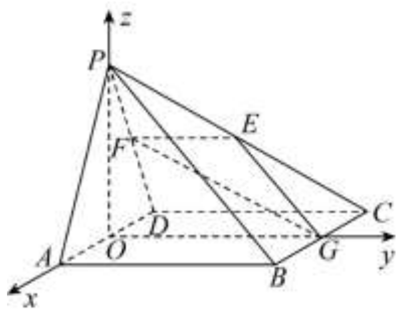
因为$\triangle PAD$是正三角形，且O是AD的中点，

所以$PO \perp AD$，又平面$APD \cap$平面$ABCD=AD$，$PO \subset$平面APD

所以$PO \perp$平面$ABCD$；

【小问2详解】

由（1）建立如图所示空间直角坐标系：



则$A(2,0,0), B(2,4,0), C(-2,4,0), D(-2,0,0)$,

$P(0,0,2\sqrt{3}), E(-1,2,\sqrt{3}), F(-1,0,\sqrt{3}), G(0,4,0)$,

所以$\overrightarrow{EF} = (0,-2,0), \overrightarrow{EG} = (1,2,-\sqrt{3})$,

设平面EFG的一个法向量为$\vec{m} = (x,y,z)$,

则$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} -2y = 0 \\ x + 2y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$,

令 $z=\sqrt{3}$，则 $x=3, y=0$，所以 $\vec{m}=(3,0,\sqrt{3})$，

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$，

所以平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\dfrac{\pi}{3}$；

【小问 3 详解】

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PG}=(2\lambda,-4,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda)$，

由（2）知平面 EFG 的一个法向量为：$\vec{m}=(3,0,\sqrt{3})$，

所以直线 GM 与平面 EFG 所成角的正弦值为 $\left|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{GM}\rangle\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{GM}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{GM}|}=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，

即 $\dfrac{6}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{(2\lambda)^2+16+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda)^2}}=\dfrac{1}{2}$，整理得 $2\lambda^2-3\lambda+2=0$，

因为 $\Delta=-7<0$，所以方程无解，即不存在满足条件的点 M.

21.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）过定点 $\left(0,-\dfrac{2}{5}\right)$

（3）$\dfrac{12}{5}$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件求得 a,b，从而求得椭圆 C 的标准方程.

（2）设出直线 AB 的方程并与椭圆方程联立，化简写出根与系数关系，根据 $MA\perp MB$ 列方程，化简后确定直线 AB 所过定点坐标.

（3）先求得 H 点的轨迹，然后求得 $\triangle HMN$ 面积的最大值.

【小问 1 详解】

依题意 $\begin{cases}b=2\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{6}, c=\sqrt{2}$，

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$.

【小问 2 详解】

依题意可知直线 AB 不过点 $M\left(0,2\right)$,

若直线 AB 的斜率不存在，则 $\angle AMB$ 为锐角，不满足 $MA \perp MB$,

所以直线 AB 的斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m\left(m\neq 2\right)$,

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$消去 y 并化简得$\left(2+3k^2\right)x^2+6kmx+3m^2-12=0$,

$\Delta=36k^2m^2-4\left(2+3k^2\right)\left(3m^2-12\right)>0$，整理得$6k^2+4-m^2>0$.

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\frac{-6km}{2+3k^2},x_1x_2=\frac{3m^2-12}{2+3k^2}$,

$\overrightarrow{MA}=\left(x_1,y_1-2\right),\overrightarrow{MB}=\left(x_2,y_2-2\right)$,

由于 $MA \perp MB$，所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(x_1,y_1-2\right)\cdot\left(x_2,y_2-2\right)=0$,

即 $x_1x_2+\left(y_1-2\right)\left(y_2-2\right)=0$,

$x_1x_2+y_1y_2-2\left(y_1+y_2\right)+4=0$,

$x_1x_2+\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)-2\left(kx_1+m+kx_2+m\right)+4=0$,

$\left(1+k^2\right)x_1x_2+\left(km-2k\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(m-2\right)^2=0$,

$\left(1+k^2\right)\times\frac{3m^2-12}{2+3k^2}-\left(km-2k\right)\times\frac{6km}{2+3k^2}+\left(m-2\right)^2=0$,

即$\left(1+k^2\right)\left(3m^2-12\right)-\left(km-2k\right)\times 6km+\left(m-2\right)^2\left(2+3k^2\right)=0$,

整理得$5m^2-8m-4=0,\left(m-2\right)\left(5m+2\right)=0$,

由于 $m\neq 2$，故解得 $m=-\frac{2}{5}$，所以直线 AB 的方程为 $y=kx-\frac{2}{5}$,

所以直线 AB 过定点$\left(0,-\frac{2}{5}\right)$，此时$\left(0,-\frac{2}{5}\right)$在椭圆 C 内，满足直线 AB 与椭圆有 2 个公共点.

【小问 3 详解】

设 $D\left(0,-\frac{2}{5}\right)$，由于 $MH\perp DH$,

所以 H 点的轨迹是以 MD 为直径的圆（M 点除外），

所以 H 到 MD，也即 H 到 MN 的距离的最大值为$\frac{1}{2}\left|MD\right|=\frac{6}{5}$,

所以$\triangle HMN$面积的最大值为$\frac{1}{2}\times|MN|\times\frac{6}{5}=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$.