2024 北京海淀初三一模
数　　学

考生须知：

1．本试卷共 7 页，共两部分，28 道题，满分 100 分．考试时间 120 分钟．

2．在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号．

3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．

4．在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色自己签字笔作答．

5．考试结束，请将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回．

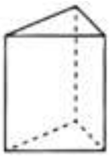
第一部分选择题

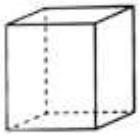
一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 下列几何体放置在水平面上，其中俯视图是圆的几何体为（　）

A. 

B. 

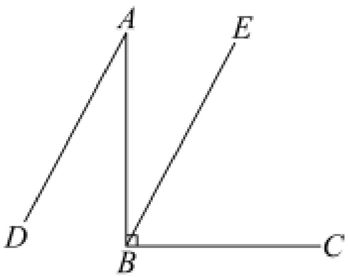
C. 

D. 

2. 据报道，2024 年春节假期北京接待游客约 1750 万人次，旅游收入同比增长近四成．将 17500000 用科学记数法表示应为（　）

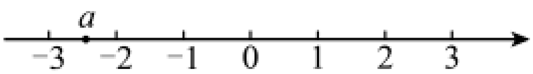
A. 175×10^5　　B. 1.75×10^6　　C. 1.75×10^7　　D. 0.175×10^8

3. 如图，$AB\perp BC$，$AD\,/\!/\,BE$，若 $\angle BAD=28^\circ$，则 $\angle CBE$ 的大小为（　）



A. 66°　　B. 64°　　C. 62°　　D. 60°

4. 实数 a 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a\ge-2$　　B. $a<-3$　　C. $-a>2$　　D. $-a\ge3$

5. 每一个外角都是 40° 的正多边形是（　）

A. 正四边形　　B. 正六边形　　C. 正七边形　　D. 正九边形

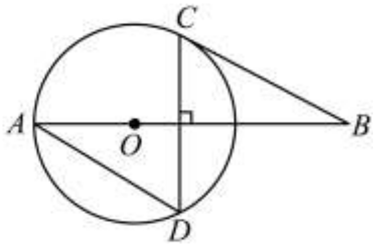
6. 关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值为（　）

A. 1　　B. -1　　C. 4　　D. -4

7. 现有三张背面完全一样的扑克牌，它们的正面花色分别为♦，♥，♥，若将这三张扑克牌背面朝上，洗匀后从中随机抽取两张，则抽取的两张牌花色相同的概率为，则两次抽取的牌花色相同的概率为（　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

8. 如图．AB 经过圆心 O，CD 是⊙O 的一条弦，$CD \perp AB$，BC 是⊙O 的切线．再从条件①，条件②，条件③中选择一个作为已知，便得 $AD = BC$．



条件①：CD 平分 AB

条件②：$OB = \sqrt{3}OA$

条件③：$AD^2 = AO \cdot AB$

则所有可以添加的条件序号是（　）

A. ①　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

第二部分非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_______.

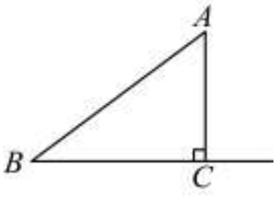
10. 分解因式 $a^3 - 4a =$__________.

11. 方程 $\frac{1}{x} = \frac{2}{3x-1}$ 的解为_______.

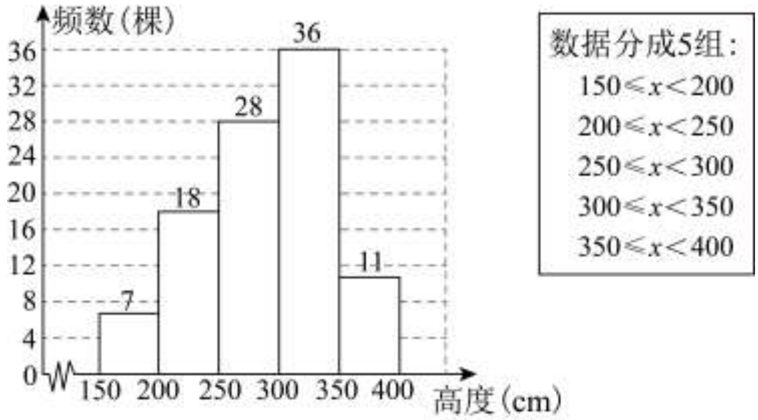
12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若函数 $y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图象经过点 $A(a, 2)$ 和 $B(b, -2)$．则 $a+b$ 的值为

_______.

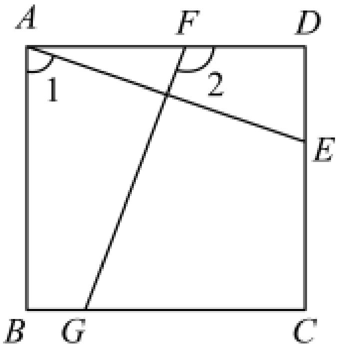
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AB = 5$，$AC = 3$．点 D 在射线 BC 上运动（不与点 B 重合）．当 BD 的长为______时，$AB = AD$．



14. 某实验基地为全面掌握“无絮杨”树苗的生长规律，定期对 2000 棵该品种树苗进行抽测．近期从中随机抽测了 100 棵树苗，获得了它们的高度 x（单位：cm）．数据经过整理后绘制的频数分布直方图如右图所示．若高度不低于 300cm 的树苗为长势良好，则估计此时该基地培育的 2000 棵“无絮杨”树苗中长势良好的有_________棵．



15. 如图，在正方形$ABCD$中．点E，F，G分别在边CD，AD，BC上，$FD<CG$．若$FG=AE$，$\angle 1=a$，则$\angle 2$的度数为_____（用含a的式子表示）．



16. 2019年11月，联合国教科文组织将每年的3月14日定为“国际数学日”，也被许多人称为“π节”．某校今年“π节”策划了五个活动，规则见下图：

小云参与了所有活动．

（1）若小云只挑战成功一个，则挑战成功的活动名称为__________；

（2）若小云共挑战成功两个，且她参与的第四个活动成功，则小云最终剩下的“π币”数量的所有可能取值为______．

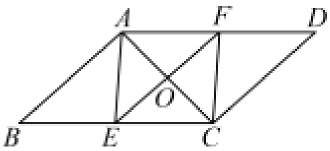
三、解答题（共68分，第17-19题，每题5分，第20-21题，每题6分，第22-23题，每题5分，第24题6分，第25题5分，第26题6分，第27-28题，每题7分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17. 计算：$2\sin 60^{\circ}+|-1|+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{12}$；

18. 解不等式组：$\begin{cases}4x-3<5\\ \dfrac{2x+1}{3}>2-x\end{cases}$

19. 已知$b^2-4a=0$，求代数式$\dfrac{4a+1}{(b-1)^2+2b}$的值.

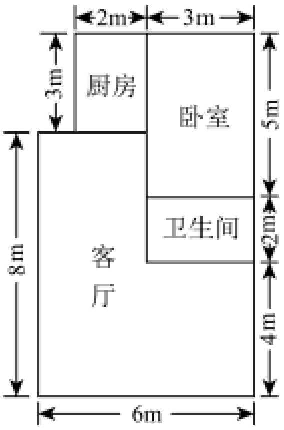
20. 如图，在▱$ABCD$中，O为AC的中点，点E，F分别在BC，AD上，EF经过点O，$AE=AF$.



（1）求证：四边形$AECF$为菱形；

（2）若E为BC的中点，$AE=3$，$AC=4$．求AB的长.

21. 下图是某房屋的平面示意图．房主准备将客厅和卧室地面铺设木地板，厨房和卫生间地面铺设瓷砖．将房间地面全部铺设完预计需要花费10000元，其中包含安装费1270元．若每平方米木地板的瓷砖的价格之比是$5:3$，求每平方米木地板和瓷砖的价格.



22. 在平面直角坐标系xOy中，函数$y=kx+b(k\neq 0)$的图象经过点$A(1,2)$和$B(0,1)$.

（1）求该函数的解析式；

（2）当$x<1$时．对于x的每一个值，函数$y=mx-1(m\neq 0)$的值小于函数$y=kx+b(k\neq 0)$的值，直接写出m的取值范围.

23. 品成本影响售价，为避免因成本波动导致售价剧烈波动，需要控制售价的涨跌幅．下面给出了商品售价和成本（单位：元）的相关公式和部分信息：

a．计算商品售价和成本涨跌幅的公式分别为：

$$\text{售价涨跌幅}=\frac{\text{当周售价}-\text{前周售价}}{\text{前周售价}}\times 100\%，\text{成本涨跌幅}=\frac{\text{当周成本}-\text{前周成本}}{\text{前周成本}}\times 100\%；$$

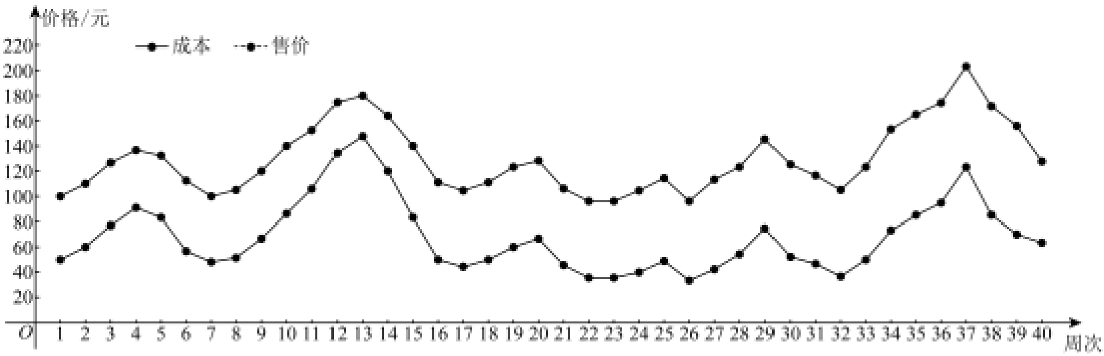
b．规定当周售价涨跌幅为当周成本涨跌幅的一半；

c．甲、乙两种商品成本与售价信息如下：

甲商品的成本与售价信息表

	第一周	第二周	第三周	第四周	第五周
成本	25	50	25	40	20
售价	40	m	45	n	p

乙商品的成本与售价统计图



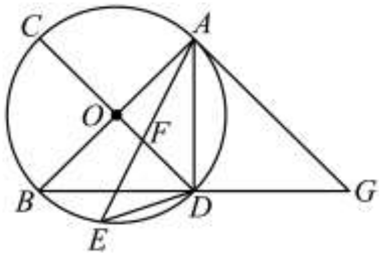
根据以上信息，回答下列问题：

（1）甲商品这五周成本的平均数为___________，中位数为___________；

（2）表中 m 的值为____________，从第三周到第五周，甲商品第_______周的售价最高；

（3）记乙商品这 40 周售价的方差为 S_1^2，若将规定“当周售价涨跌幅为当周成本涨跌幅的一半”更改为“当周售价涨跌幅为当周成本涨跌幅的四分之一”，重新计算每周售价，记这 40 周新售价的方差为 S_2^2，则 S_1^2________ S_2^2；（填“>”“=”或“<”）.

24. 如图，AB、CD 均为 $\odot O$ 的直径．点 E 在 $\overset{\frown}{BD}$ 上，连接 AE，交 CD 于点 F，连 DE，$\angle EDB+\angle EAD=45°$，点 G 在 BD 的延长线上，$AB=AG$．



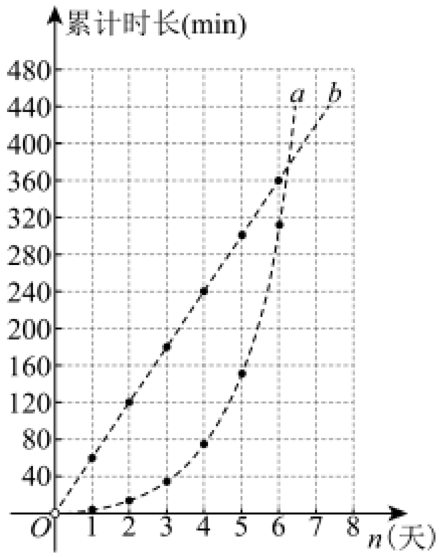
（1）求证：AG 与 $\odot O$ 相切；

（2）若 $BG=4\sqrt{5}$，$\tan\angle EDB=\dfrac{1}{3}$，求 EF 的长．

25. 某校为培养学生的阅读习惯，发起“阅读悦听”活动，现有两种打卡奖励方式：

方式一：每天打卡可领取 60 min 听书时长；

方式二：第一天打卡可领取 5 min 听书时长，之后每天打卡领取的听书时长是前一天的 2 倍．



（1）根据上述两种打卡奖励方式补全表二：

表一每天领取听书时长

天数	1	2	3	4	$\cdots$	n
方式一	60	60	60	60	$\cdots$	60
方式二	5	5×2	5×4	5×8	$\cdots$	$5\times 2^{n-1}$

表二累计领取听书时长

天数	1	2	3	4	$\cdots$	n
方式一	60	120	180	240	$\cdots$	
方式二	$5\times 2-5$	$5\times 4-5$	$5\times 8-5$	$5\times 16-5$	$\cdots$	

（2）根据表二，以天数 n 为横坐标，以该天累计领取的听书时长为纵坐标，绘制了相应的点，并用虚线表达了变化趋势．其中表示方式二变化趋势的虚线是________（填 a 或 b），从第_______天完成打卡时开始，选择方式二累计领取的听书时长超过方式一；

（3）现有一本时长不超过 $60\,\text{min}$ 的有声读物，小云希望通过打卡领取该有声读物．若选择方式二比选择方式一所需的打卡天数多两天，则这本有声读物的时长 t（单位：min ）的取值范围是______．

26. 在平面坐标系 xOy 中，点 (m,n) 在抛物线 $y=ax^2+bx(a>0)$ 上，其中 $m\neq 0$ ．

（1）当 $m=4$ ， $n=0$ 时．求抛物线的对称轴；

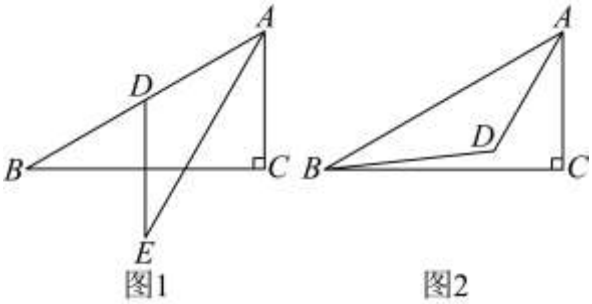
（2）已知当 $0<m<4$ 时，总有 $n<0$ ．

①求证： $4a+b\leq 0$；

②点 $P(k,y_1)$ ， $Q(3k,y_2)$ 在该抛物线上，是否存在 a，b，使得当 $1<k<2$ 时，都有 $y_1<y_2$？若存在，求出 a 与 b 之间的数量关系；若不存任，说明理由．

27. 在 $\triangle ABC$ 中．$\angle ACB=90°$ ， $\angle ABC=30°$ ，将线段 AC 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha(0°<\alpha\leq 60°)$ 得到线段

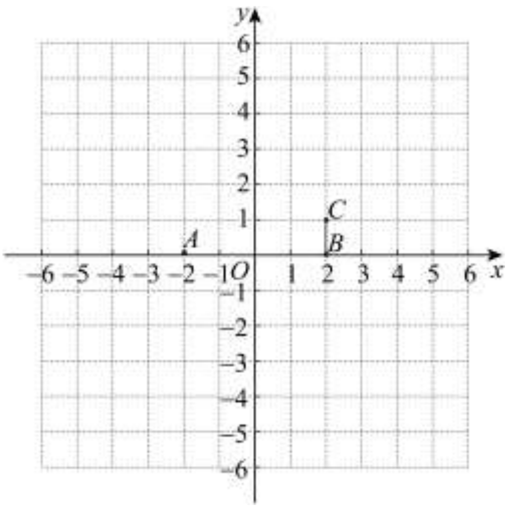
AD．点 D 关于直线 BC 的对称点为 E．连接 AE， DE．



（1）如图 1，当 $\alpha = 60°$ 时，用等式表示线段 AE 与 BD 的数量关系，并证明；

（2）连接 BD，依题意补全图 2．若 $AE = BD$，求 α 的大小．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于图形 M 与图形 N 给出如下定义：P 为图形 N 上任意一点，将图形 M 绕点 P 顺时针旋转 $90°$ 得到 M'，将所有 M' 组成的图形记作 $M*$，称 $M*$ 是图形 M 关于图形 N 的“关联图形”．



（1）已知 $A(-2,0)$， $B(2,0)$， $C(2,t)$，其中 $t \neq 0$．

① 若 $t = 1$，请在图中画出点 A 关于线段 BC 的“关联图形”；

② 若点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与坐标轴有公共点，直接写出 t 的取值范围；

（2）对于平面上一条长度为 a 的线段和一个半径为 r 的圆，点 S 在线段关于圆的“关联图形”上，记点 S 的纵坐标的最大值和最小值的差为 d，当这条线段和圆的位置变化时，直接写出 d 的取值范围（用含 a 和 r 的式子表示）．

参考答案

第一部分选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.【答案】A

【分析】本题考查三视图中的俯视图．根据题意逐项判断即可．

【详解】解：A.俯视图是圆，此选项符合题意；

B. 俯视图是长方形，此选项不符合题意；

C. 俯视图是三角形，此选项不符合题意；

D. 俯视图是正方形，此选项不符合题意．

故选：A．

2.【答案】C

【分析】本题考查了科学记数法“将一个数表示成 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数，这种记数的方法叫做科学记数法”，熟记科学记数法的定义是解题关键．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．根据科学记数法的定义即可得．

【详解】解：$17500000=1.75\times10^{7}$，

故选：C．

3.【答案】C

【分析】本题平行线的性质，垂直的定义．根据平行线的性质得 $\angle ABE=\angle BAD=28^{\circ}$，再根据垂直定义得 $\angle ABC=90^{\circ}$，即可由 $\angle CBE=\angle ABC-\angle ABE$ 求解．

【详解】解：$\because AD\parallel BE$

$\therefore \angle ABE=\angle BAD=28^{\circ}$

$\because AB\perp BC$

$\therefore \angle ABC=90^{\circ}$

$\therefore \angle CBE=\angle ABC-\angle ABE=90^{\circ}-28^{\circ}=62^{\circ}$

故选：C．

4.【答案】C

【分析】本题考查了，利用数轴比较数的大；由 a 所在位置，得出 a 的取值范围，即可判断 A 、B ，根据不等式的性质得出 $-a$ 的取值范围，即可判断 C 、D ，即可求解，

【详解】解：由数轴可知：$-3<a<-2$，则：A 、B 错误，不符合题意，

$\because 2<-a<3$，则：C 正确，符合题意，D 错误，不符合题意，

故选：C．

5.【答案】D

【分析】本题主要考查了多边形的外角和定理．根据多边形的外角和是 360° 和这个多边形的每一个外角都等于 40°，即可求得多边形的边数．

【详解】解：∵多边形的外角和是360°，这个多边形的每一个外角都等于40°，

∴这个多边形的边数是$360^\circ \div 40^\circ = 9$，

故选：D．

6.【答案】A

【分析】根据方程有两个相等的实数根，判别式等于零，进行求解即可．

【详解】解：∵关于x的一元二次方程$x^2+2x+m=0$有两个相等的实数根，

∴$b^2-4ac=4-4m=0$，

∴$m=1$；

故选A．

【点睛】本题考查一元二次方程的判别式与根的个数之间的关系．熟练掌握判别式等于0，方程有两个相等的实数根，是解题的关键．

7.【答案】B

【分析】本题考查了列表法求概率．正确列表并不重复不遗漏的列出所有可能的结果数以及满足题意的结果数成为解题的关键．

根据题意列出图表，得出所有等可能的情况数和满足题意的情况数，然后根据概率公式即可解答．

【详解】解：三张扑克牌分别用A、B、B表示，列表如下：

	A	B	B
A		（B，A）	（B，A）
B	（A，B）		（B，B）
B	（A，B）	（B，B）	

共有6种等可能的情况数，其中抽取的两张牌花色相同的有2种情况，

则抽取的两张牌花色相同的概率为$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$．

故选：B．

8.【答案】B

【分析】连接AC，OC，令AB，CD交于点E，由垂径定理可知，$CE=BE$，$\angle AED=\angle BEC=90^\circ$，则$AC=AD$，若选条件①，可是$AE=BE$，证$\triangle AED\cong\triangle BEC(\text{SAS})$，可得$AD=BC$，若选条件②，可知$OB=\sqrt{3}OC$，得$\cos\angle COE=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，设$OA=OC=r$，则$OB=\sqrt{3}r$，$OE=OC\cdot\cos\angle COE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$可得$BE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，$AE=r+\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$，则$AE\ne BE$，可得$AD\ne BC$，若选条件③，可知$\dfrac{AC}{OA}=\dfrac{AB}{AC}$，即可证$\triangle CAO\backsim\triangle BAC$，进而可证$\angle OAC=\angle B$，得$AC=BC$，可知$AD=BC$，即可判断答案．

【详解】解：连接AC，OC，令AB，CD交于点E，

$\because AB$经过圆心O，CD是$\odot O$的一条弦，$CD\perp AB$，

$\therefore CE=BE$，$\angle AED=\angle BEC=90^\circ$，

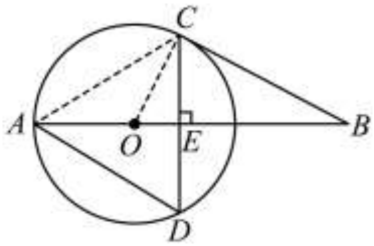
则$AC=AD$，

若选条件①，$\because CD$平分AB，

$\therefore AE=BE$，

$\therefore \triangle AED\cong\triangle BEC(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AD=BC$，故①符合题意；



若选条件②，$\because OA=OC$，

$\therefore \angle OAC=\angle OCA$，

$\because BC$是$\odot O$的切线，

$\therefore OC\perp BC$，

$\because OB=\sqrt{3}OA$，则$OB=\sqrt{3}OC$，

$\therefore \cos\angle COE=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设$OA=OC=r$，则$OB=\sqrt{3}r$，$OE=OC\cdot\cos\angle COE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$

$\therefore BE=OB-OE=\sqrt{3}r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$，$AE=OA+OE=r+\dfrac{\sqrt{3}}{3}r$，

则$AE\neq BE$，

$\therefore AC\neq BC$，即$AD\neq BC$，故②不符合题意；

若选条件③，$\because AD^2=AO\cdot AB$，即：$AC^2=AO\cdot AB$

$\therefore \dfrac{AC}{OA}=\dfrac{AB}{AC}$，

又$\because \angle CAO=\angle BAC$

$\therefore \triangle CAO\backsim\triangle BAC$，

$\therefore \angle B=\angle OCA$，

又$\because \angle OAC=\angle OCA$，

$\therefore \angle OAC=\angle B$，

$\therefore AC=BC$，

$\therefore AD=BC$，故③符合题意；

综上，所有可以添加的条件序号是①③，

故选：B．

【点睛】本题属于几何综合题，考查了垂径定理，切线的性质，全等三角形的判定及性质，相似三角形的判定及性质，解直角三角形等知识点，熟练掌握相关图形的性质是解决问题的关键．

第二部分非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9.【答案】$x\geq 1$

【分析】先根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求出 x 的取值范围即可．

【详解】解：$\because \sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，

$\therefore x$-1≥0，

解得 x≥1．

故答案为：x≥1．

【点睛】本题考查的是二次根式有意义的条件，即被开方数大于等于 0．

10.【答案】$a(a+2)(a-2)$

【分析】本题考查因式分解．先提公因式 a，再运用平方差公式分解即可．

【详解】解：$a^3-4a=a\left(a^2-4\right)=a\left(a+2\right)\left(a-2\right)$．

故答案为：$a(a+2)(a-2)$．

11.【答案】$x=1$

【分析】本题考查分式方程的解法．根据题意先去分母，再解整式方程，最后检验即可．

【详解】解：去分母，得 $3x-1=2x$

解得 $x=1$

检验：经检验 $x=1$ 是原分式方程的解．

故答案为：$x=1$．

12.【答案】0

【分析】此题主要考查了反比例函数图象上点的坐标特征，理解反比例函数图象上的点满足反比例函数的表达式是解决问题的关键．将点 $A(a,2)$ 和 $B(b,-2)$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 之中得 $a=\dfrac{k}{2}$，$b=-\dfrac{k}{2}$，由此可得 $a+b$ 的值．

【详解】解：$\because$ 函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象经过点 $A(a,2)$ 和 $B(b,-2)$，

$\therefore 2=\dfrac{k}{a}$，$-2=\dfrac{k}{b}$，

$\therefore a=\dfrac{k}{2}$，$b=-\dfrac{k}{2}$，

$\therefore a+b=\frac{k}{2}+(-\frac{k}{2})=0$．

故答案为：0．

13.【答案】8

【分析】本题主要查了等腰三角形的性质，勾股定理．根据等腰三角形的性质，可得 $BD=2BC$，再由勾股定理求出 BC 的长，即可求解．

【详解】解：∵ $AB=AD$，$\angle ACB=90°$，即 $AC\perp BC$，

∴ $BD=2BC$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$AC=3$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4$，

∴ $BD=2BC=8$，

即当 BD 的长为 8 时，$AB=AD$．

故答案为：8

14.【答案】940

【分析】本题主要考查了根据样本所占百分比估计总体频数，用 2000 乘以样本中高度不低于 300cm 的树苗的百分比，即可求出结果．

【详解】解：该基地培育的 2000 棵“无絮杨”树苗中长势良好的有：

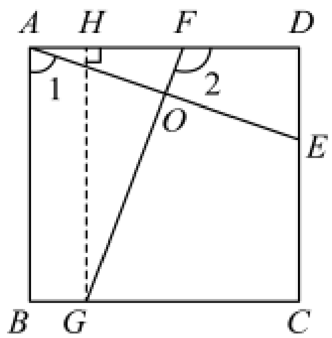
$2000\times\frac{36+11}{100}=940$（棵），

故答案为：940．

15.【答案】$180°-\alpha$

【分析】本题主要考查了正方形的性质，矩形的判定和性质，三角形全等的判定和性质，过点 G 作 $GH\perp AD$ 于点 H，证明 $\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle GHF\left(\mathrm{HL}\right)$，得出 $\angle DAE=\angle HGF$，求出 $\angle EOF=90°$，根据 $\angle DEA+\angle 2+\angle D+\angle EOF=360°$，即可求出结果．

【详解】解：过点 G 作 $GH\perp AD$ 于点 H，如图所示：



∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴ $AB=BC=CD=AD$，$\angle C=\angle D=90°$，$AB\parallel CD$，

∵ $\angle GHD=\angle D=\angle C=90°$，

∴四边形$CDHG$为矩形，

∴$GH=CD$，

∴$GH=AD$，

∵$FG=AE$，

∴$\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong \mathrm{Rt}\triangle GHF\left(\mathrm{HL}\right)$，

∴$\angle DAE=\angle HGF$，

∵$\angle HGF+\angle HFG=90^\circ$，

∴$\angle DAE+\angle HFG=90^\circ$，

∴$\angle AOF=90^\circ$，

∴$\angle EOF=90^\circ$，

∵$AB\,//\,CD$，

∴$\angle DEA=\angle 1$，

∵$\angle DEA+\angle 2+\angle D+\angle EOF=360^\circ$，

∴$\angle 2=360^\circ-\angle 1-90^\circ-90^\circ=180^\circ-\alpha$.

故答案为：$180^\circ-\alpha$.

16.【答案】 ①. 鲁班锁； ②. 1，2，3

【分析】本题主要考查了逻辑推理：

（1）根据小云参与了所有活动．可得小云第一个挑战必定成功，再由只挑战成功一个，可得小云第一个挑战成功需要得到4个“π币”，即可；

（2）根据题意可得小云第一个挑战必定成功，且挑战成功的活动可能为华容道或魔方或鲁班锁，第二，三、五次挑战失败，然后分三种情况讨论，即可．

【详解】解：∵小云参与了所有活动．

∴小云第一个挑战必定成功，

∵小云只挑战成功一个，

∴小云第一个挑战成功需要得到4个“π币”，

∴挑战成功的活动名称为鲁班锁；

故答案为：鲁班锁；

（2）∵小云共挑战成功两个，且她参与的第四个活动成功，

∴小云第一个挑战必定成功，且挑战成功的活动可能为华容道或魔方或鲁班锁，第二，三、五次挑战失败，

若第一次挑战华容道，

当第四次挑战24点或数独时，最终剩下的“π币”数量的取值为$3-1-1+2-1-1=1$；

当第四次挑战魔方时，最终剩下的“π币”数量的取值为$3-1-1+3-1-1=2$；

当第四次挑战鲁班锁时，最终剩下的“π币”数量的取值为$3-1-1+4-1-1=3$；

若第一次挑战魔方，

当第四次挑战24点或数独时，最终剩下的“π币”数量的取值为$3-1-1+2-1-1=1$；

当第四次挑战华容道时，最终剩下的“π币”数量的取值为$3-1-1+3-1-1=2$；

当第四次挑战鲁班锁时，最终剩下的“π币”数量的取值为$3-1-1+4-1-1=3$；

若第一次挑战鲁班锁，

当第四次挑战24点或数独时，最终剩下的“π币”数量的取值为$4-1-1+2-1-1=2$；

当第四次挑战华容道或魔方时，最终剩下的“π币”数量的取值为$4-1-1+3-1-1=3$；

综上所述，最终剩下的“π币”数量的所有可能取值为1，2，3.

故答案为：1，2，3

三、解答题（共68分，第17-19题，每题5分，第20-21题，每题6分，第22-23题，每题5分，第24题6分，第25题5分，第26题6分，第27-28题，每题7分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.【答案】$3-\sqrt{3}$

【分析】本题考查实数的运算，熟练掌握相关运算法则是解题的关键．利用特殊锐角三角函数值，绝对值，负整数指数幂，二次根式的性质计算即可.

【详解】解：原式$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1+2-2\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}+1+2-2\sqrt{3}$

$=3-\sqrt{3}$.

18.【答案】$1<x<2$

【分析】此题主要考查了解一元一次不等式组，熟练掌握一元一次不等式组的一般解法是解决问题的关键．先解不等式$4x-3<5$，得$x<2$，再解不等式$\frac{2x+1}{3}>2-x$，得$x>1$，由此可得原不等式组的解集.

【详解】解：原不等式组为$\begin{cases}4x-3<5,① \\ \frac{2x+1}{3}>2-x.②\end{cases}$

解不等式①，得$x<2$.

解不等式②，得$x>1$.

$\therefore$原不等式组的解集为$1<x<2$.

19.【答案】1

【分析】本题主要考查了分式的化简求值，先根据完全平方公式去括号，然后把分母合并同类项得到$\frac{4a+1}{b^2+1}$，再根据已知条件可得$b^2=4a$，据此可得答案.

【详解】解：$\frac{4a+1}{(b-1)^2+2b}$

$=\dfrac{4a+1}{b^2-2b+1+2b}$

$=\dfrac{4a+1}{b^2+1}$,

$\because b^2-4a=0$，

$\therefore b^2=4a$.

$\therefore$原式$=\dfrac{4a+1}{4a+1}=1$.

20.【答案】(1）证明见解析；

（2）$2\sqrt{5}$.

【分析】本题考查了平行四边形的性质、菱形的判定与性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

（1）先得出$\angle AFO=\angle CEO$，$\angle FAO=\angle ECO$．结合线段中点，得出$AO=CO$，得证$\triangle AOF\cong\triangle COE$，根据一组邻边相等的平行四边形是菱形，即可作答.

（2）先得出$OA=\dfrac{1}{2}AC=2$，结合菱形性质，在$\mathrm{Rt}\triangle AOE$中，由勾股定理得$OE=\sqrt{AE^2-OA^2}$，代入数值进行计算，即可作答.

【小问1详解】

证明：$\because$四边形$ABCD$为平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$.

$\therefore\angle AFO=\angle CEO$，$\angle FAO=\angle ECO$.

$\because O$为AC的中点，

$\therefore AO=CO$.

$\therefore\triangle AOF\cong\triangle COE$.

$\therefore AF=EC$.

$\because AF\parallel EC$,

$\therefore$四边形$AECF$为平行四边形.

$\because AE=AF$，

$\therefore$四边形$AECF$为菱形.

【小问2详解】

解：$\because O$为AC的中点，$AC=4$，

$\therefore OA=\dfrac{1}{2}AC=2$.

$\because$四边形$AECF$为菱形，

$\therefore AC\perp EF$.

$\therefore \angle AOE = 90^{\circ}$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中，由勾股定理得 $OE = \sqrt{AE^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

$\because E$ 为 BC 的中点，

$\therefore AB = 2OE = 2\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、菱形的判定与性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

21.【答案】每平方米木地板的价格为 150 元，每平方米瓷砖的价格为 90 元.

【分析】本题考查了一元一次方程的应用，找出等量关系是解答本题的关键． 设每平方米木地板的价格为 $5x$ 元，则每平方米瓷砖的价格为 $3x$ 元，根据花费 10000 元，其中包含安装费 1270 元列方程求解即可.

【详解】解：设每平方米木地板的价格为 $5x$ 元，则每平方米瓷砖的价格为 $3x$ 元.

厨房面积： $2 \times 3 = 6\mathrm{m}^2$，

卫生间面积： $2 \times 3 = 6\mathrm{m}^2$，

客厅面积：$(8-4) \times 3 + 6 \times 4 = 36\mathrm{m}^2$，

卧室面积：$5 \times 3 = 15\mathrm{m}^2$，

由题意可得，$(6+6) \times 3x + (36+15) \times 5x = 10000 - 1270$，

解得 $x = 30$，

$\therefore 5x = 150$， $3x = 90$.

答：每平方米木地板的价格为 150 元，每平方米瓷砖的价格为 90 元.

22.【答案】（1）函数的解析式为 $y = x + 1$

（2）$1 \le m \le 3$

【分析】本题考查一次函数的图象与性质、待定系数法求函数解析式，熟练掌握待定系数法和数形结合思想求解是解答的关键.

（1）利用待定系数法求解即可；

（2）将 $A(1,2)$ 代入 $y = mx - 1$ 中，求得 $m = 3$，则 $y = 3x - 1$；将 $(1,0)$ 代入 $y = mx - 1$ 中求得 $m = 1$，则 $y = x - 1$，作出图象，再结合一次函数的图象与性质求解即可.

【小问 1 详解】

解：把点 $A(1,2)$ 和 $B(0,1)$ 代入 $y = kx + b$ 得：

$$\begin{cases} k + b = 2 \\ b = 1 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases}$,

$\therefore$ 该函数的解析式为 $y = x + 1$；

【小问 2 详解】

解：将$(1,2)$代入$y=mx-1$中，

解得$m=3$，

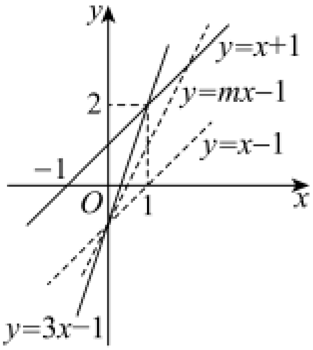
此时函数解析式为$y=3x-1$

将$(1,0)$代入$y=mx-1$中，

解得$m=1$，

此时函数的解析式为$y=x-1$，

如图，



由于当$x<1$时，对于x的每一个值，函数$y=mx-1(m\neq 0)$的值小于一次函数$y=x+1$的值，

$\therefore$根据图象可得直线$y=mx-1$与直线$y=x+1$的交点的横坐标不小于 1，

$\therefore 1\le m\le 3$.

23.【答案】（1）32， 25

（2）60，四

（3）>

【分析】（1）由题意知，成本从小到大依次排序为$20,25,25,40,50$；则甲商品这五周成本的平均数为$\frac{20+25\times 2+40+50}{5}$，中位数为第 3 个位置的数，求解作答即可；

（2）由题意知，第二周成本的涨跌幅为$\frac{50-25}{25}\times 100\%=100\%$，第二周售价的涨跌幅为$\frac{m-40}{40}\times 100\%=100\%\times \frac{1}{2}$，可求$m=60$；同理可求$n=58.5$； $p=43.875$；根据$43.875<45<58.5$，作答即可；

（3）由$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，可知改规定后售价的波动比改规定前的售价波动小，即$S_1^2>S_2^2$，然后作答即可.

【小问 1 详解】

解：由题意知，成本从小到大依次排序为$20,25,25,40,50$；

$\therefore$甲商品这五周成本的平均数为$\frac{20+25\times 2+40+50}{5}=32$，

中位数为第 3 个位置的数即中位数是25，

故答案为：32， 25；

【小问 2 详解】

解：由题意知，第二周成本的涨跌幅为$\frac{50-25}{25}\times 100\%=100\%$，

∴第二周售价的涨跌幅为$\frac{m-40}{40}\times 100\%=100\%\times \frac{1}{2}$，

解得，$m=60$；

同理，第四周成本的涨跌幅为60%，第四周售价的涨跌幅为$\frac{n-45}{45}\times 100\%=60\%\times \frac{1}{2}$，

解得，$n=58.5$；

第五周成本的涨跌幅为-50%，第五周售价的涨跌幅为$\frac{p-58.5}{58.5}\times 100\%=-50\%\times \frac{1}{2}$，

解得，$p=43.875$；

$\because 43.875<45<58.5$，

∴从第三周到第五周，甲商品第四周的售价最高，

故答案为：60，四；

【小问 3 详解】

解：由题意知，改规定前“当周售价涨跌幅为当周成本涨跌幅的一半”，改规定后“当周售价涨跌幅为当周成本涨跌幅的四分之一”，

$\because \frac{1}{2}>\frac{1}{4}$，

∴改规定后售价的波动比改规定前的售价波动小，

$\therefore S_1^2>S_2^2$，

故答案为：>.

【点睛】本题考查了平均数，中位数，一元一次方程的应用，方差与稳定性．熟练掌握平均数，中位数，一元一次方程的应用，方差与稳定性是解题的关键．

24.【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{8}{3}$

【分析】（1）根据圆周角定理可得$\angle BAE=\angle BDE$，结合已知可得$\angle BAD=45^\circ$，再根据等腰三角形的性质得出$\angle BAD=\angle GAD=45^\circ$，求出$\angle BAG=90^\circ$即可得出结论；

（2）连接BE，根据等腰三角形的性质求出BD，进而可得AB，OA的长，然后根据三角函数的定义和勾股定理求出AE，再在$\mathrm{Rt}\triangle AOF$中，根据三角函数的定义和勾股定理求出AF，进而可得EF的长．

【小问 1 详解】

证明：$\because \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{BE}$，

$\therefore \angle BAE=\angle BDE$，

$\because \angle EDB + \angle EAD = 45^\circ$，

$\therefore \angle BAE + \angle EAD = 45^\circ$，即 $\angle BAD = 45^\circ$，

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$，

$\therefore AD \perp BG$，

$\because AB = AG$，

$\therefore \angle BAD = \angle GAD = 45^\circ$，

$\therefore \angle BAG = 90^\circ$，

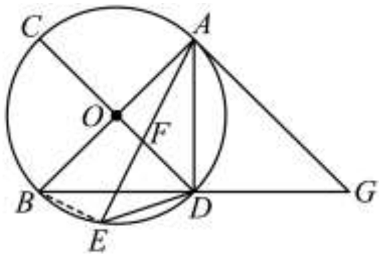
$\therefore AB \perp AG$，

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore AG$ 与 $\odot O$ 相切；

【小问 2 详解】

解：连接 BE，如图，



$\because AB = AG$， $AD \perp BG$， $BG = 4\sqrt{5}$，

$\therefore BD = \dfrac{1}{2}BG = 2\sqrt{5}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中， $\angle ADB = 90^\circ$， $\angle BAD = 45^\circ$，

$\therefore AB = \sqrt{2}BD = 2\sqrt{10}$，

$\therefore OA = \dfrac{1}{2}AB = \sqrt{10}$，

$\because \angle BAE = \angle BDE$，

$\therefore \tan\angle BAE = \tan\angle BDE = \dfrac{1}{3}$，

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$.

$\therefore$在 $\mathrm{Rt}\triangle AEB$ 中， $\tan\angle BAE = \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{1}{3}$，

$\therefore BE = \dfrac{1}{3}AE$，

由勾股定理得 $BE^2 + AE^2 = AB^2$.

$\therefore \left(\frac{1}{3}AE\right)^2 + AE^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$，

$\therefore AE = 6$，

$\because \angle BOD = 2\angle BAD = 90^\circ$．

$\therefore \angle AOF = 90^\circ$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle AOF$中，$\tan\angle BAE = \frac{OF}{OA} = \frac{OF}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3}$，

$\therefore OF = \frac{\sqrt{10}}{3}$，

$\therefore AF = \sqrt{OA^2 + OF^2} = \frac{10}{3}$，

$\therefore EF = AE - AF = 6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$．

【点睛】本题考查了圆周角定理的推论，等腰三角形的性质，锐角三角函数的定义，勾股定理，切线的判定等知识，作出合适的辅助线，熟练掌握相关判定定理和性质定理是解题的关键．

25.【答案】（1）$60n$，$5\times 2^n - 5$

（2）a，7

（3）$15 < t \le 35$

【分析】（1）根据表二中两种方式每天累计领取听书时长的数字规律，即得答案；

（2）根据表二中的数据变化情况及图中两线的交点情况，即得答案；

（3）由已知可得选择方式一只需打卡 1 天，选择方式二需打卡 3 天，由此即得答案．

【小问 1 详解】

表二中，对于方式一，第 1 天累计领取听书时长为$(60\times 1)\,\mathrm{min}$，

第 2 天累计领取听书时长为$(60\times 2)\,\mathrm{min}$，

第 3 天累计领取听书时长为$(60\times 3)\,\mathrm{min}$，

依次规律，第 n 天累计领取听书时长为$(60n)\,\mathrm{min}$；

对于方式二，第 1 天累计领取听书时长为$(5\times 2 - 5)\,\mathrm{min}$，

第 2 天累计领取听书时长为$(5\times 2^2 - 5)\,\mathrm{min}$，

第 3 天累计领取听书时长为$(5\times 2^3 - 5)\,\mathrm{min}$，

依次规律，第 n 天累计领取听书时长为$(5\times 2^n - 5)\,\mathrm{min}$；

故答案为：$60n$，$5\times 2^n - 5$．

【小问 2 详解】

由表二的数据可知，表示方式二变化趋势的虚线是 a，第 7 天开始，曲线 a 上点的纵坐标大于射线 b 上对应点的纵坐标，

即选择方式二累计领取的听书时长超过方式一；

故答案为：a，7.

【小问 3 详解】

$\because$ 该有声读物的听书时长不超过 $60\,\text{min}$，

$\therefore$ 选择方式一只需打卡 1 天，

$\therefore$ 选择方式二需打卡 3 天，

$\therefore t$ 的取值范围是 $15 < t \le 35$.

故答案为：$15 < t \le 35$.

【点睛】本题考查了数字规律的探求，函数的表示方法, 从函数图象获取信息及求函数值的取值范围等知识，正确理解题意是解题的关键.

26.【答案】（1）抛物线的对称轴为直线 $x = 2$

（2）①证明见解析；②存在，$4a + b = 0$，理由见解析

【分析】（1）将点 $\left(4,0\right)$ 代入 $y = ax^2 + bx(a > 0)$，求出 a 、b 的关系式，根据对称轴公式，即可求解，

（2）①方法一：求出抛物线与 x 轴交点，根据 b 的符号分类讨论，即可求解，方法二：将 (m,n) 代入，$y = ax^2 + bx(a > 0)$，根据 $0 < m < 4$，$n < 0$，得到 $-\dfrac{b}{a} \ge 4$，即可求解，

（3）设抛物线的对称轴为 $x = t$，则 $t = -\dfrac{b}{2a}$，由 $1 < k < 2$，得到 $3 < 3k < 6$，$k < 3k$，根据 t 的范围，二次函数的增减性，分情况讨论即可求解，

本题考查了，求抛物线的对称轴，二次函数的增减性，解题的关键是：熟练掌握二次函数的增减性.

【小问 1 详解】

解：由题意可知，点 $\left(4,0\right)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx(a > 0)$ 上，

$\therefore 16a + 4b = 0$，

$\therefore b = -4a$，

$\therefore \dfrac{b}{-2a} = \dfrac{-4a}{-2a} = 2$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$；

【小问 2 详解】

解：①方法一：

令 $y = 0$，则 $ax^2 + bx = 0(a > 0)$，

解得：$x = 0$ 或 $x = -\dfrac{b}{a}$，

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx(a > 0)$ 与 x 轴交于点 $\left(0,0\right)$，$\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$，

$\because a > 0$，

$\therefore$抛物线开口向上，

（i）当$b<0$时，$-\dfrac{b}{a}>0$，

$\therefore$当$0<x<-\dfrac{b}{a}$时，$y<0$；当$x<0$或$x>-\dfrac{b}{a}$时，$y>0$，

$\because$当$0<m<4$时，总有$n<0$，

$\therefore -\dfrac{b}{a}\geq 4$，

$\because a>0$，

$\therefore 4a+b\leq 0$，

（ii）当$b>0$时，$-\dfrac{b}{a}<0$，

$\therefore$当$-\dfrac{b}{a}<x<0$时，$y<0$；当$x<-\dfrac{b}{a}$或$x>0$时，$y>0$，

$\therefore$当$0<m<4$时，$n>0$，不符合题意，

综上，$4a+b\leq 0$，

方法二：

$\therefore$由题意可知，$am^2+bm=n$．

若$n<0$，则$am^2+bm=m\left(am+b\right)<0$．

$\because m>0$，

$\therefore am+b<0$．

$\because a>0$，

$\therefore m<-\dfrac{b}{a}$．

$\therefore$当$0<m<-\dfrac{b}{a}$时，$n<0$．

$\because$当$0<m<4$时，总有$n<0$．

$\therefore -\dfrac{b}{a}\geq 4$．

$\because a>0$，

$\therefore 4a+b\leq 0$，

②存在，

设抛物线的对称轴为$x=t$，则$t=-\dfrac{b}{2a}$，

$\because a>0$，

$\therefore$当$x\geq t$时，y随x的增大而增大；当$x\leq t$时，y随x的增大而减小，

$\because 1<k<2$，

$\therefore 3<3k<6$， $k<3k$，

（i）当$t\le 1$时，

$\because t\le k<3k$，

$\therefore y_1<y_2$，符合题意，

（ii）当$1<t\le 2$时，

当$t\le k<2$时，

$\because t<k<3k$，

$\therefore y_1<y_2$，

当$1<k<t$时，

设点$P\left(k,y_1\right)$关于抛物线对称轴$x=t$的对称点为点$P'\left(x_0,y_1\right)$，

则$x_0>t$， $t-k=x_0-t$，

$\therefore x_0=2t-k$，

$\because 1<k<t$， $1<t\le 2$，

$\therefore 2t-k<3$，

$\therefore t<x_0<3$，

$\because 3<3k<6$，

$\therefore t<x_0<3k$，

$\therefore y_1<y_2$，

$\therefore$当$1<t\le 2$时，符合题意，

（iii）当$2<t\le 3$时，

令$k=\dfrac{1}{2}t$， $3k=\dfrac{3}{2}t$，则$y_1=y_2$，不符合题意，

（iv）当$3<t<6$时，

令$3k=t$，则$k<3k\le t$，

$\therefore y_1>y_2$，不符合题意，

（v）当$t\ge 6$时，

$\because k<3k<t$，

$\therefore y_1>y_2$，不符合题意，

$\therefore$当$t\le 2$，即$-\dfrac{b}{2a}\le 2$时，符合题意，

$\because a>0$，

$\therefore 4a+b\ge 0$，

由（1）可得$4a+b\le 0$，

$\therefore 4a+b=0$.

27.【答案】（1）$AE=\sqrt{3}BD$，证明见解析；

（2）$\alpha=30^\circ$.

【分析】（1）先证明$\triangle DBE$是等边三角形，由等边三角形的性质与直角三角形的性质得$\angle BEA=90^\circ$，再根据正切三角函数定义求解即可得出结论.

（2）方法一：延长AC至F，使$CF=AC$，连接BF，BE，EF，CD，CE，如图2，先证明$\triangle DAC\cong\triangle EFC$，再证明$\triangle BEF\cong\triangle AEF$，得$\angle BFE=\angle AFE=30^\circ$. 从而得出$\angle CAD=\angle AFE=30^\circ$. 即可求解.

方法二：如图3，取AB中点F，连接DF，BE，CD，CE，设$\angle DBC=\beta$. 先证明$\triangle ACE\cong\triangle BFD$，再证明$\triangle ADF\cong\triangle ADC$. 得$\angle FAD=\angle CAD=30^\circ$. 即可求解.

【小问1详解】

解：线段AE与BD的数量关系：$AE=\sqrt{3}BD$.

证明：连接BE，如图1.

$\because$点D，E关于直线BC对称，

$\therefore$直线BC是线段DE的垂直平分线.

$\therefore BD=BE$.

$\therefore \angle DBC=\angle EBC=30^\circ$.

$\therefore \angle DBE=60^\circ$.

$\therefore \triangle DBE$是等边三角形.

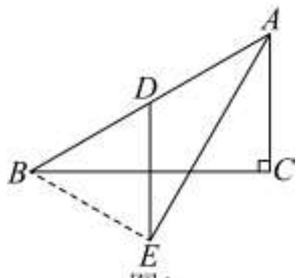


图1

$\therefore BD=BE=DE$，$\angle BDE=\angle BED=60^\circ$.

$\because \triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，

$\therefore AB=2AC$.

依题意，得$AD=AC$，点D在AB上.

$\therefore AB=2AD$.

$\therefore BD=AD$.

$\therefore DE=AD$.

$\therefore \angle DAE = \angle DEA = 30^\circ$.

$\therefore \angle BEA = 90^\circ$.

$\therefore$在$Rt\triangle ABE$中，$\dfrac{AE}{BE} = \tan\angle ABE = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

$\therefore AE = \sqrt{3}BE$.

$\therefore AE = \sqrt{3}BD$.

【小问2详解】

解：依题意补全图2，如图.

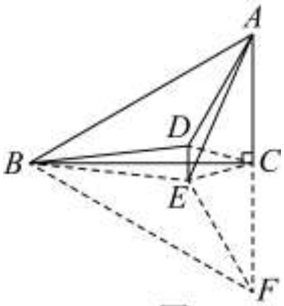


图2

方法一：延长AC至F，使$CF = AC$，连接BF，BE，EF，CD，CE，如图2.

$\because \angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore AB = BF$.

$\because \angle BAC = 60^\circ$，

$\therefore \triangle ABF$是等边三角形.

$\therefore AB = AF = BF$，$\angle BFC = 60^\circ$.

$\because$点D，E关于直线BC对称，

$\therefore$直线BC是线段DE的垂直平分线.

$\therefore BD = BE$，$CD = CE$.

$\therefore \angle DCB = \angle ECB$.

$\because \angle ACB = \angle BCF = 90^\circ$，

$\therefore \angle DCA = \angle ECF$.

$\because AC = FC$，

$\therefore \triangle DAC \cong \triangle EFC$.

$\therefore \angle CAD = \angle CFE$.

$\because AE = BD$，

$\therefore BE = AE$.

$\because EF = EF$，$BF = AF$，

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle AEF$.

$\therefore \angle BFE = \angle AFE = 30^\circ$.

$\therefore \angle CAD = \angle AFE = 30^\circ$.

$\therefore \alpha = 30^\circ$.

方法二：如图 3，取 AB 中点 F，连接 DF， BE， CD， CE，设 $\angle DBC = \beta$.

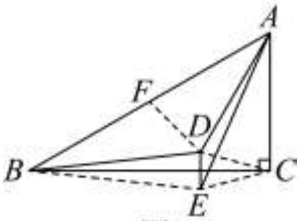


图3

$\because$ 点 D， E 关于直线 BC 对称，

$\therefore$ 直线 BC 是线段 DE 的垂直平分线.

$\therefore BD = BE$， $CD = CE$.

$\therefore \angle DBC = \angle EBC = \beta$.

$\therefore \angle EBA = 30^\circ + \beta, \angle DBA = 30^\circ - \beta$.

$\because AE = BD$，

$\therefore AE = BE$.

$\therefore \angle EAB = \angle EBA = 30^\circ + \beta$.

$\because \angle ACB = 90^\circ$， $\angle ABC = 30^\circ$，

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$.

$\therefore \angle EAC = 30^\circ - \beta$.

$\therefore \angle EAC = \angle DBA$.

由（1）可得 $AB = 2AC$.

$\because F$ 为 AB 中点，

$\therefore AB = 2AF = 2BF$.

$\therefore AC = AF = BF$.

$\because AC = BF$， $\angle EAC = \angle DBA$， $AE = BD$，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BFD$.

$\therefore CE = FD$.

$\therefore CD = FD$.

$\because AD = AD$， $AF = AC$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADC$.

$\therefore \angle FAD = \angle CAD = 30^\circ$.

$\therefore \alpha = 30^\circ$.

【点睛】本题考查轴对称的性质，线段垂直平分线的性质，等边三角形的判定与性质，直角三角形的性质，等腰三角形的性质，正切三角函数，旋转的性质，全等三角形的判定与性质．掌握旋转的性质、全等三角形的判定与性质、正切三角函数等知识是解题的关键．

28．【答案】（1）①见详解；② $t \le -4$ 或 $t \ge 2$

（2） $2\sqrt{2}r \le d \le 2\sqrt{2}r + a$

【分析】（1）① 根据新定义找出关键点 B、C 的旋转 $90°$ 后连接 $B'C'$ 即可；

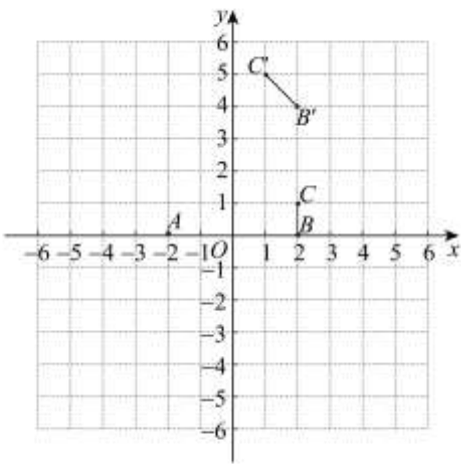
② 同上理分情况讨论即可；

（2）画出分析图，如图所示，线段 AB 的长度为 a ，圆 N 的半径为 r ，易得 $\triangle BNP \backsim \triangle BN_1Q$ 且相似比为 $1:\sqrt{2}$ ，再移动图形即可求出 d ；

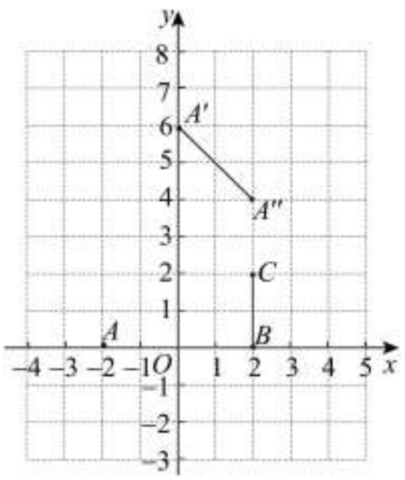
本题考查了旋转的性质，圆的有关性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握以上知识的应用是解题的关键．

【小问 1 详解】

解：① 如图所示：线段 $B'C'$ 即为所求；



② 如图：

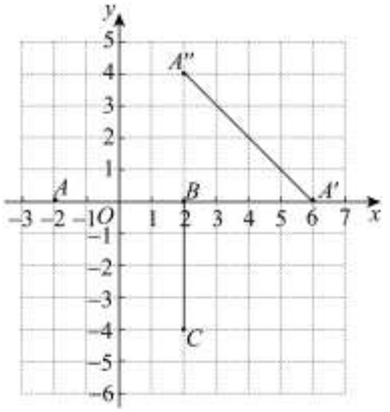


当 $t = 2$ 时，点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 y 轴恰有公共点，

$\therefore t \ge 2$ 时，点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 y 轴有公共点；

当 $t = -4$ 时，点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 x 轴恰有公共点，

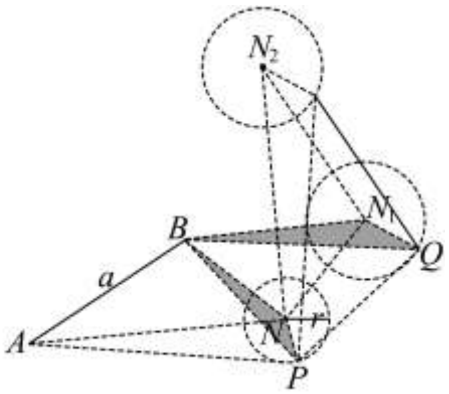
$\therefore t \le -4$ 时，点 A 关于线段 BC 的“关联图形”与 x 轴有公共点；



综上所述：$t \le -4$ 或 $t \ge 2$；

【小问 2 详解】

如图，



画出分析图，如图所示，线段 AB 的长度为 a，圆 N 的半径为 r，

点 A、B 分别绕点 N 顺时针旋转 $90°$ 得到 N_1、N_2，

分析可知 $\triangle BNP \backsim \triangle BN_1Q$ 且相似比为 $1:\sqrt{2}$，

可得圆 N_1、N_2 的半径均为 $\sqrt{2}r$，

随意转动图，可得 $2\sqrt{2}r \le d \le 2\sqrt{2}r + a$．