2023北京东城初三一模

数　　学

学校______班级______姓名______教育 ID 号______

考生须知：

1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校、班级、姓名和教育 ID 号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 $2B$ 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束后，将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

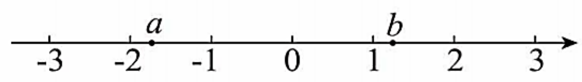
1.下列四个几何体中，主视图为三角形的是（　）

2.2023 年 2 月 28 日，国家统计局发布的《中华人民共和国 2022 年国民经济和社会发展统计公报》中报道：2022 年全年研究与试验发展（R&D）经费支出 30870 亿元，比上年增长 10.4%.将数字 30870 用科学记数法表示应为（　）

A. 3.087×10^{4}　　B. 30.87×10^{3}　　C. 0.3087×10^{5}　　D. 3.087×10^{5}

3.下面四个图案均由北京 2022 年冬奥会比赛项目图标组成，其中可看作轴对称图形的是（　）

4.若实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图所示，则 $a+b$ 的值可能是（　）

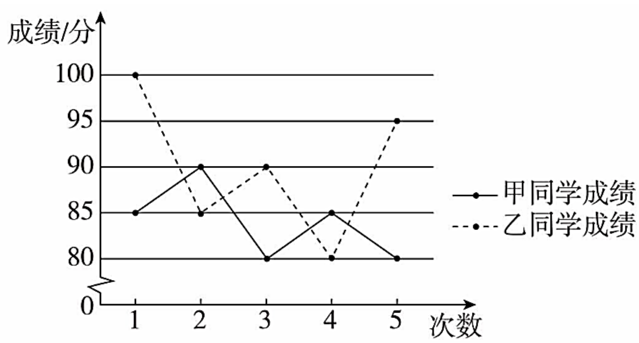


A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C.0　　D. $\frac{1}{2}$

5.用配方法解一元二次方程 $x^2+6x+3=0$ 时，将它化为 $(x+m)^2=n$ 的形式，则 $m-n$ 的值为（　）

A. -6　　B. -3　　C.0　　D.2

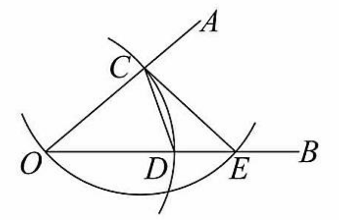
6.下图是甲、乙两名同学五次数学测试成绩的折线图.比较甲、乙两名同学的成绩，下列说法正确的是（　）



A.甲同学平均分高，成绩波动较小　　　　　B.甲同学平均分高，成绩波动较大

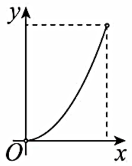
C.乙同学平均分高，成绩波动较小　　　　　D.乙同学平均分高，成绩波动较大

7.如图，$\angle AOB=40^{\circ}$，按下列步骤作图：①在 OA 边上取一点 C，以点 O 为圆心、OC 长为半径画弧，交 OB 于点 D，连接 CD；②以点 C 为圆心、CO 长为半径画弧，交 OB 于点 E，连接 CE，则 $\angle DCE$ 的度数为（　）

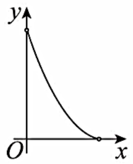


A. 20°　　　　B. 30°　　　　C. 40°　　　　D. 50°

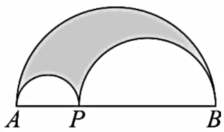
8.如图，动点 P 在线段 AB 上（不与点 A，B 重合），分别以 AB，AP，BP 为直径作半圆，记图中所示的阴影部分面积为 y，线段 AP 的长为 x.当点 P 从点 A 移动到点 B 时，y 随 x 的变化而变化，则表示 y 与 x 之间关系的图象大致是（　）

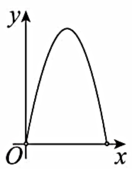


A

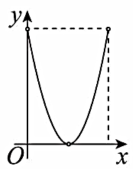


B





C



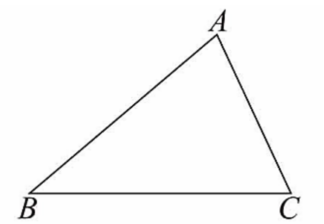
D

二、填空题（本题共16分，每小题2分）

9.若分式 $\dfrac{2x-1}{x}$ 的值为0，则实数 x 的值为______.

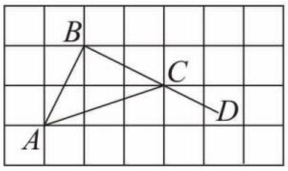
10.分解因式：$2x^{2}-4x+2=$______.

11.如图，已知 $\triangle ABC$，用直尺测量 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高约为______cm（结果保留一位小数）.



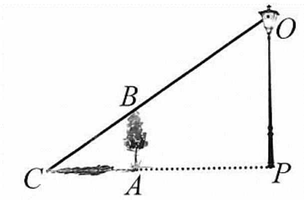
12.已知点 $A(\sqrt{2},m)$，$B(\dfrac{3}{2},n)$ 在一次函数 $y=2x+b$ 的图象上，则 m______n（填“>”“=”或“<”）.

13.在如图所示的网格中，每个小正方形的边长都是1，点 A，B，C 是网格线交点，则 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的度数等于______°.

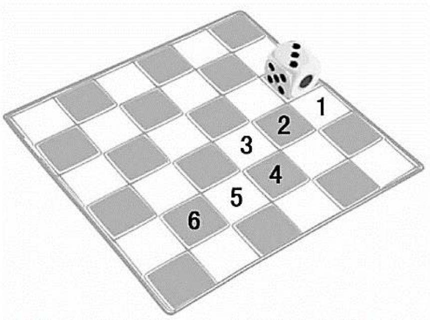


14.抛掷一枚质地均匀的硬币 2 次，抛掷的结果都是正面朝上的概率是______.

15.如图，树 AB 在路灯 O 的照射下形成树影 AC.已知灯杆 PO 高为 5m，树影 AC 长为 3m，树 AB 与灯杆 PO 的水平距离 AP 为 4.5m，则树 AB 的高度为______m.



16.一枚质地均匀的骰子放在棋盘上，骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数，相对两个面上的点数之和为 7.骰子摆放的初始位置如图所示.骰子由初始位置翻滚一次，点数为 1 的面落在 1 号格内；再从 1 号格翻滚一次，点数为 5 的面落在 2 号格内；继续这样翻滚.......



（1）当骰子翻滚到 2 号格时，朝上一面的点数为______；

（2）依次翻滚 6 次到 6 号格，每次翻滚后骰子朝上一面的点数之和为______.

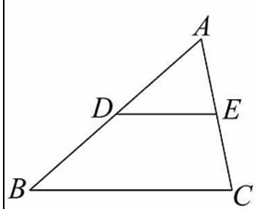
三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

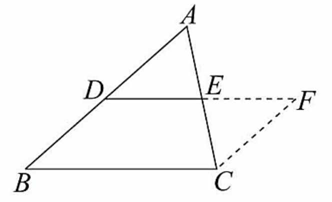
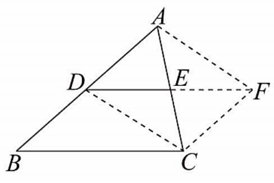
17.计算 $\sqrt{27}-3\tan 30^{\circ}+2023^{0}-|-1|$.

18.解不等式组 $\begin{cases}\dfrac{3x-1}{2}<2x, \\ 2x+1\geq x-1.\end{cases}$

19.已知 $x^{2}-3x-1=0$，求代数式 $(x+2)(x-2)+(x-3)^{2}$ 的值.

20.下面是证明三角形中位线定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.

<table>
<tr><td colspan="2">三角形中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.
已知：如图，点 D，E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点.
求证：$DE \parallel BC$，且 $DE=\dfrac{1}{2}BC$.

</td></tr>
<tr><td>方法一
证明：如图，过点 C 作 $CF \parallel AB$，交 DE 的延长线于点 F.</td><td>方法二
证明：如图，延长 DE 到点 F，使得 $EF=DE$，连接 FC，DC，AF.</td></tr>
</table>

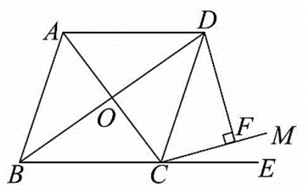
	

21.在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象经过点 $(-1,3)$.

（1）求这个反比例函数的解析式；

（2）当 $x<-1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=-x+n$ 的值大于反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的值，直接写出 n 的取值范围.

22.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，BD 平分 $\angle ABC$.



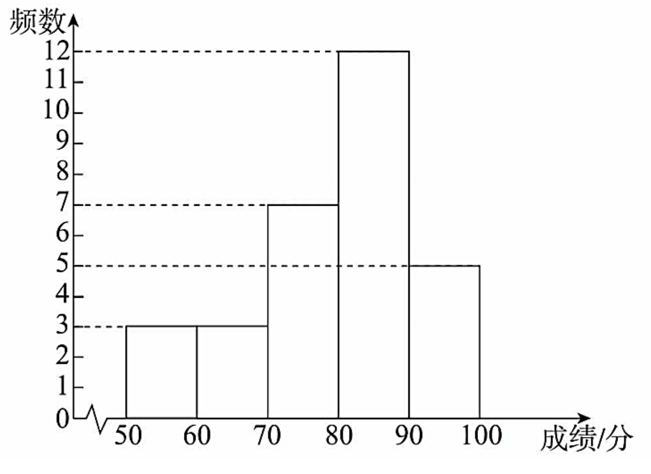
（1）求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

（2）连接 AC 交 BD 于点 O，延长 BC 到点 E，在 $\angle DCE$ 的内部作射线 CM，使得 $\angle ECM=15^{\circ}$，过点 D 作 $DF\perp CM$ 于点 F.若 $\angle ABC=70^{\circ}$，$DF=\sqrt{5}$，求 $\angle ACD$ 的度数及 BD 的长.

23.某校开展了"学习二十大"的知识竞赛（百分制），七、八年级学生参加了本次活动.为了解两个年级的答题情况，该校从每个年级各随机抽取了 30 名学生的成绩，并对数据（成绩）进行了整理、描述和分析.下面给出了部分信息.

a.七年级成绩的频数分布直方图如下

（数据分成五组：$50\le x<60$，$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le 100$）；



b.七年级成绩在 $80\le x<90$ 的数据如下（单位：分）：

80 81 85 85 85 85 85 85 85 85 88 89

c.七、八年级各抽取的 30 名学生成绩的平均数、中位数、众数、方差如下表：

年级	平均数	中位数	众数	方差
七年级	80.4	m	n	141.04
八年级	80.4	83	84	86.10

根据以上信息，回答下列问题：

（1）表中 $m=$______，$n=$______；

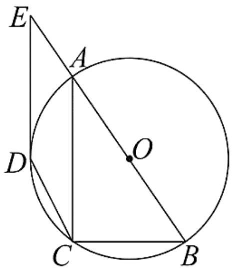
（2）下列推断合理的是______；

①样本中两个年级数据的平均数相同，八年级数据的方差较小，由此可以推断该校八年级学生成绩的波动程度较小；

②若八年级小明同学的成绩是 84 分，可以推断他的成绩超过了该校八年级一半以上学生的成绩.

（3）竞赛成绩 80 分及以上记为优秀，该校七年级有 600 名学生，估计七年级成绩优秀的学生人数.

24.如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C，D 在 $\odot O$ 上，点 D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，$\odot O$ 的切线 DE 交 BA 的延长线于点 E，连接 AC，BC，CD.

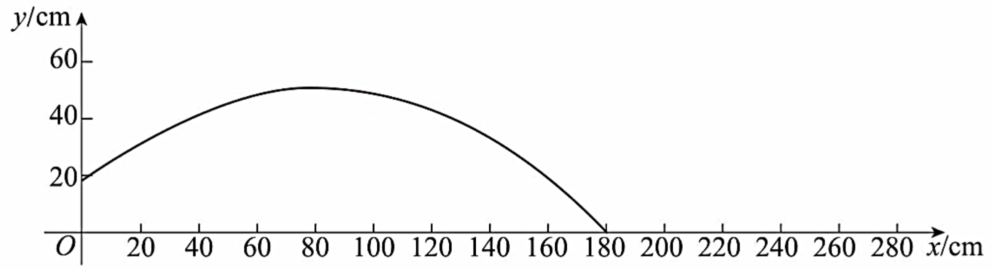


（1）求证：$\angle E=\angle BAC$；

（2）若 $\odot O$ 的半径长为 5，$\cos E=\dfrac{4}{5}$，求 CD 和 DE 的长.

25.已知乒乓球桌的长度为 274cm，某人从球桌边缘正上方高 18cm 处将乒乓球向正前方抛向对面桌面，乒乓球的运动路线近似是抛物线的一部分.

（1）建立如图所示的平面直角坐标系，从乒乓球抛出到第一次落在球桌的过程中，乒乓球的竖直高度 y（单位：cm）与水平距离 x（单位：cm）近似满足函数关系 $y=a(x-h_1)^2+k(a<0)$.



乒乓球的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下表所示.根据表中数据，直接写出乒乓球竖直高度的最大值，并求出满足的函数关系式；

水平距离 x/cm	0	40	80	120	160
竖直高度 y/cm	18	42	50	42	18

（2）乒乓球第一次落在球桌后弹起，它的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系 $y=-0.005(x-h_2)^2+8$.判断乒乓球再次落下时是否仍落在球桌上，并说明理由.

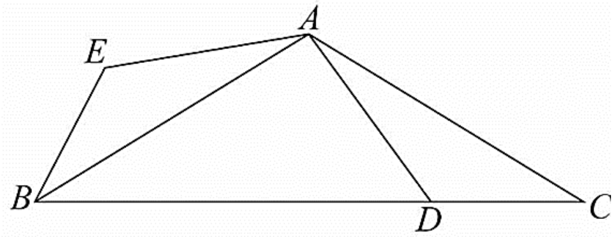
26.已知抛物线 $y=ax^2-2ax(a\neq 0)$.

（1）求该抛物线的顶点坐标（用含 a 的式子表示）；

（2）当 $a>0$ 时，抛物线上有两点 $(-1,s)$，(k,t)，若 $s>t$ 时，直接写出 k 的取值范围；

（3）若 $A(m-1,y_1)$，$B(m,y_2)$，$C(m+3,y_3)$ 都在抛物线上，是否存在实数 m，使得 $y_1<y_3<y_2\le -a$ 恒成立？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，请说明理由.

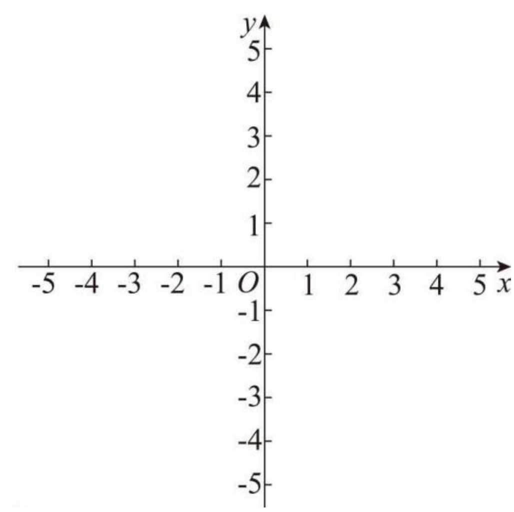
27.如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$，点 D 在 BC 边上，以点 A 为中心，将线段 AD 顺时针旋转 α 得到线段 AE，连接 BE.



（1）求证：BA 平分 $\angle EBC$；

（2）连接 DE 交 AB 于点 F，过点 C 作 $CG\parallel AB$，交 ED 的延长线于点 G.补全图形，用等式表示线段 EF 与 DG 之间的数量关系，并证明.

28.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(a,b)$，将点 P 向左（$a\ge 0$）或向右（$a<0$）平移 $k|a|$ 个单位长度，再向下（$b\ge 0$）或向上（$b<0$）平移 $k|b|$ 个单位长度（$k>0$），得到点 P'，再将点 P 关于直线 MP' 对称得到点 Q，称点 Q 为点 P 的 k 倍“对应点”.特别地，当 M 与 P' 重合时，点 Q 为点 P 关于点 M 的中心对称点.



（1）已知点 $P(3,0)$，$k=2$.

①若点 M 的坐标为 $(0,1)$，画出点 P'，并直接写出点 P 的 2 倍“对应点”Q 的坐标；

②若 $OM=1$，直线 $y=x+b$ 上存在点 P 的 2 倍“对应点”，直接写出 b 的取值范围；

（2）半径为 3 的 $\odot O$ 上有不重合的两点 M，P，若半径为 1 的 $\odot O$ 上存在点 P 的 k 倍“对应点”，直接写出 k 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	B	B	D	B	C

二、填空题(本题共 16 分，每小题 2 分)

9. $\frac{1}{2}$　　10. $2(x-1)^2$　　11. 1.8　　12. <

13. 135　　14. $\frac{1}{4}$　　15. 2　　16. (1)2　(2)21

三、解答题（本题共 68 分，第 17—21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24—26 题，每题 6 分，第 27 —28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.计算 $\sqrt{27}-3\tan 30^\circ+2023^0-|-1|$.

$=3\sqrt{3}-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1-1$ ·············· 4 分

$=2\sqrt{3}$ ·············· 5 分

18.解：$\begin{cases}\frac{3x-1}{2}<2x,①\\ 2x+1\geq x-1.②\end{cases}$

由①得 $x>-1$，·········· 2 分

由②得 $x\geq -2$ ·········· 4 分

所以不等式组的解集是 $x>-1$ ·········· 5 分

19. 解: $(x+2)(x-2)+(x-3)^2$

$=x^2-4+x^2-6x+9$

$=2x^2-6x+5.$

$\because x^2-3x-1=0,$

$\therefore x^2-3x=1.$

$\because 2x^2-6x=2.$

$\therefore$原式$=2x^2-6x+5=7$ ··············· 5 分

20．解：方法一：

证明：$\because CF // AB$,

$\therefore \angle A=\angle ECF, \angle ADE=\angle F$.

又$\because$点 E 是 AC 的中点，

$\therefore AE=CE$.

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE$

$\therefore AD=CF$，$DE=FE$.

又$\because$点 D 是 AB 的中点，

$\therefore AD=BD$.

$\therefore CF=BD$.

$\therefore$四边形 $BCFD$ 是平行四边形.

$\therefore DF//BC, DF=BC$

$\therefore DE//BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC$ ·········· 5 分

方法二：

证明：∵$AE=EC,DE=EF$,

∴四边形 $ADCF$ 是平行四边形.

∴$CF//DA$,且 $CF=DA$.

∴$CF//BD$,且 $CF=BD$

∴四边形 $DBCF$ 是平行四边形

∴$DF//BC$,且 $DF=BC$.

又∵ $DE=\frac{1}{2}DF$

∴$DE//BC$,且 $DE=\frac{1}{2}BC$ ··········· 5 分

21.解：（1）∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象经过点（-1,3），

∴ $3=\frac{k}{-1}$.

∴ $k=-3$.

∴反比例函数的解析式为 $y=-\frac{3}{x}$ ············ 3 分

（2）$n\geq 2$ ··········· 5 分

22.（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴$AD//BC$.

∴ $\angle ADB=\angle CBD$

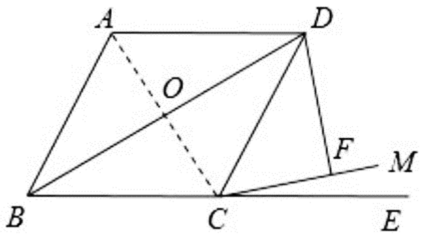
又∵BD 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ABD=\angle CBD$

∴ $\angle ADB=\angle ABD$

∴$AB=AD$.

∴四边形 $ABCD$ 是菱形 ··········· 3 分



(2)解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AB//CD$, $\angle DOC=90°$, $BD=2DO$.

∴ $\angle DCE=\angle ABC=70°$

∵$\angle ECM=15°$,

∴ $\angle DCM=55°$.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $\angle BCD=110°$

∴ $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle ACD=55°$.

∴ $\angle ACD=\angle DCM$.

又∵ $DF\perp CM$，

∴ $DO=DF=\sqrt{5}$.

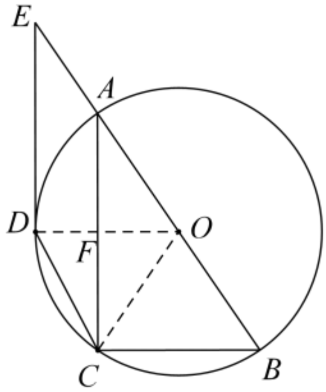
∴ $BD=2DO=2\sqrt{5}$ ············ 6 分

23 解：(1)83,85 ··········· 2 分

(2)①②. ············ 4 分

（3）$\frac{17}{30}\times 600=340$（人）.

答：估计七年级成绩优秀的学生人数为 340 人. ············ 5 分



24.（1）证明：如图，连接 OD 交 AC 于点 F,连接 OC.

∵DE 是⊙O 的切线，

∴ $OD\perp DE$.

∴ $\angle ODE=90°$.

∵点 D 为$\widehat{AC}$的中点，

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$.

$\therefore \angle AOD = \angle COD$.

∴AO=CO,

$\therefore OF \perp AC$.

$\therefore \angle OFA = 90° = \angle ODE$.

∴DE//AC.

$\therefore \angle E = \angle BAC$ ············ 3 分

（2）解：$\because \angle E = \angle BAC$

$\therefore \cos\angle BAC = \cos E = \dfrac{4}{5}$.

在 $Rt\triangle AOF$ 中，$\cos\angle BAC = \dfrac{AF}{OA} = \dfrac{4}{5}, OA = 5,$

∴AF=4，OF=3.

∴DF=2.

$\because OF \perp AC,$

∴CF=AF=4.

在在 $Rt\triangle CDF$ 中，由勾股定理得 $CD = 2\sqrt{5}$.

在在 $Rt\triangle ODE$ 中，$\cos E = \dfrac{4}{5}$,

$\therefore \tan E = \dfrac{OD}{DE} = \dfrac{3}{4}$.

$\therefore DE = \dfrac{20}{3}$ ··········· 6 分

25.解：（1）50 ·········· 1 分

根据表格数据,将(0,18)和(80,50)代入函数关系式 $y = a\left(x - h_1\right)^2 + k$，

解得 $a = -0.005$

∴二次函数的关系式为 $y = -0.005\left(x - 80\right)^2 + 50$ ·········· 3 分

(2)乒乓球仍落在球桌上.理由如下：

令 y=0,则 x=180.

∴OB=180

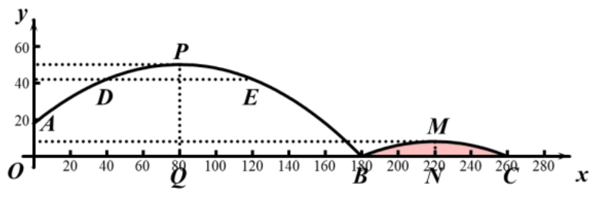
令 y=42,则 x=80±40

∴BC=DE=80.

∵OC=OB+BC=260.

∵260<274,

∴乒乓球仍落在球桌上·········6 分



26 解：(1) $y = ax^2 - 2ax$

$= a\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right)$

$= a\left(x - 1\right)^2 - a.$

∴抛物线的顶点坐标为 $\left(1, -a\right)$ ·········· 2 分

(2) $-1 < k < 3$.. ·········· 4 分

(3) $y_1 < y_2 < y_3 \le -a$,且顶点坐标为 $\left(1, -a\right)$,

∴抛物线开口向下

$\therefore a<0$.

点 $A\left(m-1, y_1\right), C\left(m+3, y_3\right)$ 关于直线 $x=1$ 对称的点的坐标分别为

$A'\left(3-m, y_1\right), C'\left(-1-m, y_3\right)$.

$\because m-1<m<m+3, y_1<y_3<y_2$,

∴点 A,B,C 不可能在对称轴的同侧.

∴点 A 在对称轴左侧，点 C 在对称轴右侧.

当点 B 在对称轴左侧或在对称轴上时，可得 $\begin{cases} m>-1-m \\ -1-m>m-1, \\ m\le 1 \end{cases}$

解得 $-\dfrac{1}{2}<m<0$.

当点 B 在对称轴右侧时，可得 $\begin{cases} m>1 \\ m+3>3-m, \\ m<3-m \end{cases}$

此时不等式组无解.

综上所述，m 的取值范围为 $-\dfrac{1}{2}<m<0$ ·········· 6 分

27.(1)证明：∵将线段 AD 顺时针旋转 α 得到线段 AE,

$\therefore \angle EAD=a, AD=AE$.

$\because \angle BAC=a$,

$\therefore \angle BAC=\angle EAD$.

$\therefore \angle BAC-\angle BAD=\angle EAD-\angle BAD$,即 $\angle DAC=\angle EAB$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$\begin{cases} AC=AC, \\ \angle DAC=\angle EAB, \\ AD=AE. \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE(SAS)$.

$\therefore \angle ABE=\angle C$.

∵$AB=AC$,

$\therefore \angle ABC=\angle C$.

$\therefore \angle ABE=\angle ABC$.

∴BA 平分 $\angle EBC$ ·········· 3 分

(2)解：补全图形如图，$EF=CG$.理由如下:

在 AB 上取一点 M,使得 $BM=CG$,连接 EM.

∵$CG // AB$,

$\therefore \angle ABC=\angle DCG, \angle BFG=\angle CGD$.

$\therefore \angle EBM=\angle DCG$.

由(1)知 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$,

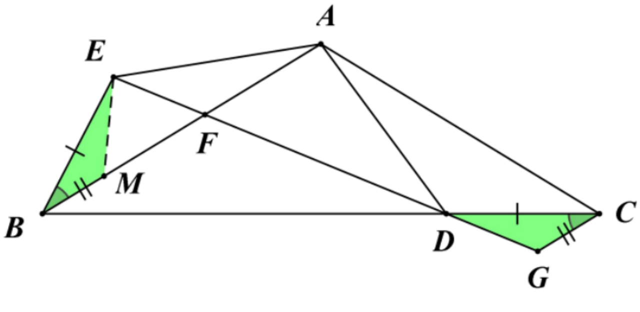
∴$EB=CD$.

在 $\triangle EBM$ 和 $\triangle DCG$ 中

$\begin{cases} EB=DC, \\ \angle EBM=\angle DCG, \\ BM=CG. \end{cases}$

$\therefore \triangle EBM \cong \triangle DCG(SAS)$,

∴$EM=DG$，$\angle EBM=\angle DCG$.



$\because \angle EMB + \angle EMF = 180°, \angle EFM + \angle DFM = 180°$,

$\therefore \angle EMF = \angle EFM$.

∴*EM*=*EF*.

∴*EF*=*DG*. ········· 7 分

28.解：(1)①画图略，点 *P*'坐标为(3,-2)；点 *Q* 坐标为(1,-2) ········· 3 分

② $-2\sqrt{2}-1 \le b \le 2\sqrt{2}-1$ ········· 5 分

(2) $\frac{1}{2} \le k \le 2$ ········· 7 分