2024 北京西城初三一模

数　学

考生须知：

1. 本试卷共 7 页，共两部分， 28 道题．满分 100 分．考试时间 120 分钟．

2. 在试卷和草稿纸上准确填写姓名、准考证号、考场号和座位号．

3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上， 在试卷上作答无效．

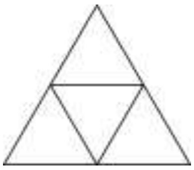
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答．

5. 考试结束， 将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回．

第一部分 选择题

一、选择题 (共 16 分，每题 2 分)第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 如图是某几何体的展开图，该几何体是（　）

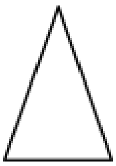
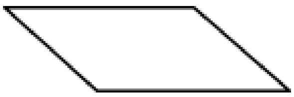
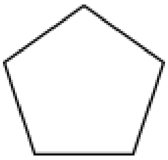
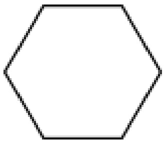


A. 圆锥　　B. 三棱柱　　C. 三棱锥　　D. 四棱锥

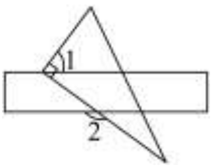
2. 2024 年 5.5G 技术正式开始商用，它的数据下载的最高速率从 5G 初期的 $1Gbps$ 提升到 $10Gbps$，给我们的智慧生活“提速”. 其中 $10Gbps$ 表示每秒传输 10000000000 位(bit)的数据. 将 10000000000 用科学记数法表示应为（　）

A. 0.1×10^{11}　　B. 1×10^{10}　　C. 1×10^{11}　　D. 10×10^{9}

3. 下列图形中，既是中心对称图形也是轴对称图形的是（　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

4. 直尺和三角板如图摆放，若 $\angle1=55°$，则 $\angle2$ 的大小为（　）



A. 35°　　B. 55°　　C. 135°　　D. 145°

5. 不透明袋子中装有红、蓝小球各一个，除颜色外无其他差别，随机摸出一个小球后，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，则两次都摸到蓝球的概率为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

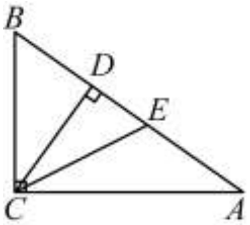
6. 已知$-2<a<-1$，则下列结论正确的是（ ）

A. $a<1<-a<2$ B. $1<a<-a<2$ C. $1<-a<2<a$ D. $-a<1<a<2$

7. 若关于x的一元二次方程 $kx^2+x-2=0$有两个实数根，则实数k的取值范围是（ ）

A. $k\le -\frac{1}{8}$ B. $k>-\frac{1}{8}$且$k\ne 0$ C. $k\ge -\frac{1}{8}$且$k\ne 0$ D. $k\ge -\frac{1}{4}$且$k\ne 0$

8. 如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$BC=a$，$AC=b$（其中$a<b$）．$CD\perp AB$于点D，点E在边AB上，$BE=BC$. 设$CD=h$，$AD=m$，$BD=n$，给出下面三个结论：① $n^2+h^2<(m+n)^2$；② $2h^2>m^2+n^2$；③ AE的长是关于x的方程 $x^2+2ax-b^2=0$的一个实数根．上述结论中，所有正确结论的序号是（ ）



A. ① B. ①③ C. ②③ D. ①②③

第二部分 非选择题

二、填空题 (共 16 分，每题 2 分)

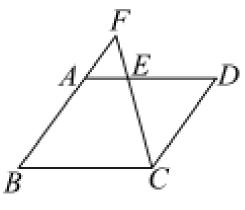
9. 若$\sqrt{x-3}$在实数范围内有意义，则实数x的取值范围是______.

10. 分解因式：$x^2y-12xy+36y=$______.

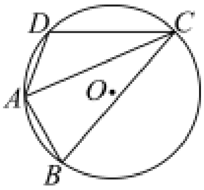
11. 方程 $\frac{4}{3x-1}=\frac{3}{x-2}$的解为______.

12. 在平面直角坐标系xOy中，若函数$y=\frac{k}{x}(k\ne 0)$的图象经过点$(-1,8)$和$(2,n)$，则n的值为______.

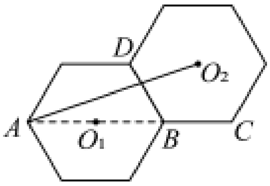
13. 如图，在▱$ABCD$中，点E在边AD上，BA，CE的延长线交于点F．若$AF=1$，$AB=2$，则$\frac{AE}{ED}=$______.



14. 如图，在⊙O的内接四边形$ABCD$中，点A是$\overset{\frown}{BD}$的中点，连接AC，若$\angle DAB=130°$，则$\angle ACB=$______°.



15. 如图，两个边长相等的正六边形的公共边为 BD，点 A，B，C 在同一直线上， 点 O_1，O_2 分别为两个正六边形的中心． 则 $\tan\angle O_2AC$ 的值为______．



16. 将 1，2，3，4，5，…，37 这 37 个连续整数不重不漏地填入 37 个空格中．要求：从左至右，第 1 个数是第 2 个数的倍数，第 1 个数与第 2 个数之和是第 3 个数的倍数，第 1，2，3 个数之和是第 4 个数的倍数，…，前 36 个数的和是第 37 个数的倍数．若第 1 个空格填入 37，则第 2 个空格所填入的数为______，第 37 个空格所填入的数为______．

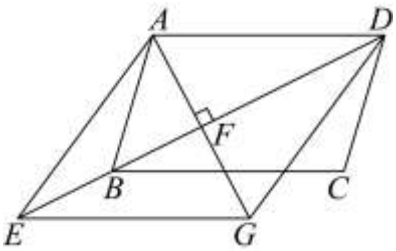
37							

17. 计算： $\left|-\sqrt{3}\right|-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}+2\sin60^\circ-\sqrt{12}$．

18. 解不等式组: $\begin{cases}2(x+1)<x+5, \\ \dfrac{x+2}{3}\ge\dfrac{x-1}{2}.\end{cases}$

19. 已知 $x^2-x-4=0$，求代数式 $(x-2)^2+(x-1)(x+3)$ 的值.

20. 如图，点 E 在 $\square ABCD$ 的对角线 DB 的延长线上， $AE=AD$， $AF\perp BD$ 于点 F， $EG/\!/BC$ 交 AF 的延长线于点 G，连接 DG．



（1）求证: 四边形 $AEGD$ 是菱形;

（2）若 $AF=BF$，$\tan\angle AEF=\dfrac{1}{2}$，$AB=4$，求菱形 $AEGD$ 的面积.

21. 某学校组织学生社团活动，打算恰好用 1000 元经费购买围棋和象棋，其中围棋每套 40 元，象棋每套 30 元．所购买围棋的套数能否是所购买象棋套数的 2 倍?若能，请求出所购买的围棋和象棋的套数，若不能，请说明理由．

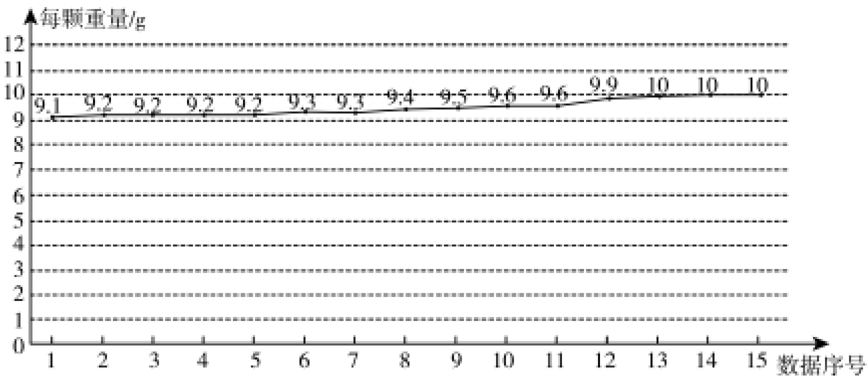
22. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b\left(k\neq 0\right)$ 的图象经过点 $A\left(3,5\right),B\left(-2,0\right)$， 且与 y 轴交于点 C.

（1）求该函数的解析式及点 C 的坐标；

（2）当 $x<2$ 时， 对于 x 的每一个值， 函数 $y=-3x+n$ 的值大于函数 $y=kx+b\left(k\neq 0\right)$ 的值，直接写出 n 的取值范围.

23. 某学校组织学生采摘山楂制作冰糖葫芦(每串冰糖葫芦由 5 颗山楂制成). 同学们经过采摘、筛选、洗净等环节，共得到 $7.6\mathrm{kg}$ 的山楂. 甲、乙两位同学各随机分到了 15 颗山楂，他们测量了每颗山楂的重量(单位：g)，并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息.

a. 甲同学的山楂重量的折线图：



b. 乙同学的山楂重量：

8， 8.8， 8.9， 9.4， 9.4， 9.4， 9.6， 9.6， 9.6， 9.8， 10， 10， 10， 10， 10

c. 甲、乙两位同学的山楂重量的平均数、中位数、众数：

	平均数	中位数	众数
甲	9.5	m	9.2
乙	9.5	9.6	n

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m， n 的值；

（2）对于制作冰糖葫芦，如果一串冰糖葫芦中 5 颗山楂重量的方差越小，则认为这串山楂的品相越好.

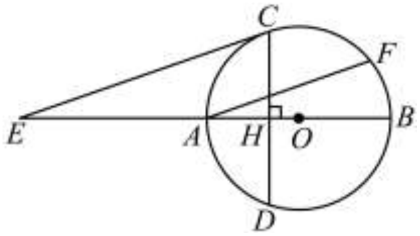
①甲、乙两位同学分别选择了以下 5 颗山楂制作冰糖葫芦. 据此推断：品相更好的是______(填写“甲”或“乙”)；

甲	9.2	9.2	9.2	9.2	9.1
乙	9.4	9.4	9.4	8.9	8.8

②甲同学从剩余的 10 颗山楂中选出 5 颗山楂制作一串冰糖葫芦参加比赛，首先要求组成的冰糖葫芦品相尽可能好，其次要求冰糖葫芦的山楂重量尽可能大. 他已经选定的三颗山楂的重量分别为 9.4，9.5，9.6，则选出的另外两颗山楂的重量分别为___和___；

（3）估计这些山楂共能制作多少串冰糖葫芦．

24. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 H，$\odot O$ 的切线 CE 与 BA 的延长线交于点 E，$AF \parallel CE$，AF 与 $\odot O$ 的交点为 F.

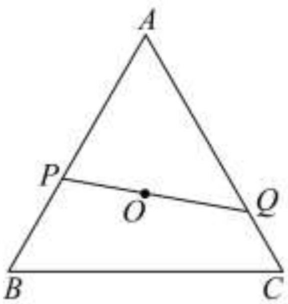


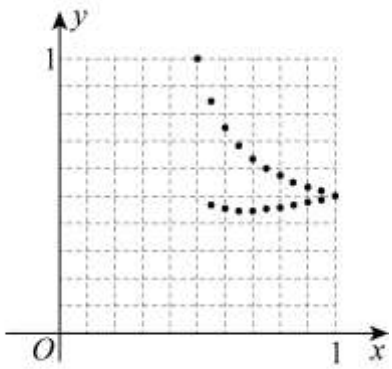
（1）求证：$AF = CD$；

（2）若 $\odot O$ 的半径为 6，$AH = 2OH$，求 AE 的长．

25. 如图，点 O 为边长为 1 的等边三角形 ABC 的外心．线段 PQ 经过点 O，交边 AB 于点 P，交边 AC 于点 Q．若 $AP = x$，$AQ = y_1$，$S_{APQ} : S_{ABC} = y_2$，下表给出了 x，y_1，y_2 的一些数据 (近似值精确到 0.0001).

x	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
y_1	1	0.8462	0.75	0.6842	0.6364	0.6	0.5714	0.5484	0.5294	0.5135	0.5
y_2		0.4654	0.45	0.4447	0.4455	0.45	0.4571	0.4661	0.4765	0.4878	0.5





（1）补全表格；

（2）在同一平面直角坐标系 xOy 中描出了部分点 $(x,y_1),(x,y_2)$．请补全表格中数据的对应点，并分别画出 y_1 与 y_2 关于 x 的函数图象；

（3）结合函数图象，解决下列问题：

①当 $\triangle APQ$ 是等腰三角形时，y_1 关于 x 的函数图象上的对应点记为 (a,b)，请在 x 轴上标出横坐标为 a 的点；

②当 y_2 取最大值时，x 的值为____．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-2,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(m,y_3)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ $(a > 0)$

上．设抛物线的对称轴为直线 $x=t$.

（1）若 $y_1=3$，求 t 的值；

（2）若当 $t+1<m<t+2$ 时，都有 $y_1>y_3>y_2$，求 t 的取值范围.

27. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\angle ACB=45°$，$AM\perp BC$ 于点 M .D 是射线 AB 上的动点 (不与点 A，B 重合)，点 E 在射线 AC 上且满足 $AE=AD$，过点 D 作直线 BE 的垂线交直线 BC 于点 F，垂足为点 G，直线 BE 交射线 AM 于点 P.

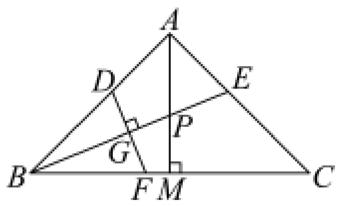


图1

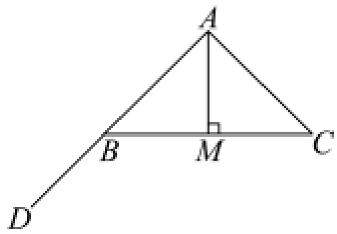
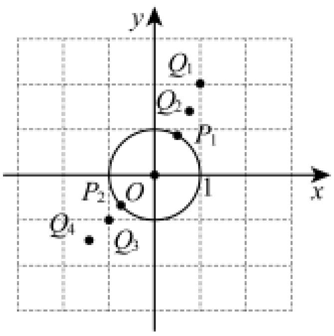


图2

（1）如图 1，若点 D 在线段 AB 上，当 $AP=AE$ 时，求 $\angle BDF$ 的大小；

（2）如图 2，若点 D 在线段 AB 的延长线上，依题意补全图形，用等式表示线段 CF，MP，AB 的数量关系，并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知⊙O 的半径为1．对于⊙O 上的点 P 和平面内的直线 $l: y=ax$ 给出如下定义：点 P 关于直线 l 的对称点记为 P'，若射线 OP 上的点 Q 满足 $OQ=PP'$，则称点 Q 为点 P 关于直线 l 的“衍生点”.



（1）当 $a=0$ 时，已知⊙O 上两点 $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.在点 $Q_1(1,2)$，$Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，$Q_3(-1,-1)$，$Q_4\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ 中，点 P_1 关于直线 l 的“衍生点”是______，点 P_2 关于直线 l 的“衍生点”是______；

（2）P 为⊙O 上任意一点，直线 $y=x+m$ $(m\neq 0)$ 与 x 轴，y 轴的交点分别为点 A，B．若线段 AB 上存在点 S，T，使得点 S 是点 P 关于直线 l 的“衍生点”，点 T 不是点 P 关于直线 l 的“衍生点”，直接写出 m 的取值范围；

（3）当 $-1\le a\le 1$ 时，若过原点的直线 s 上存在线段 MN，对于线段 MN 上任意一点 R，都存在⊙O 上的点 P 和直线 l，使得点 R 是点 P 关于直线 l 的“衍生点”．将线段 MN 长度的最大值记为 $D(s)$，对于

所有的直线s，直接写出$D(s)$的最小值.

参考答案

第一部分 选择题

一、选择题 (共 16 分，每题 2 分)第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.【答案】C

【分析】本题考查了几何体的侧面展开图，从实物出发，结合具体的问题，辨析几何体的展开图，通过结合立体图形与平面图形的转化，建立空间观念，是解决此类问题的关键．根据侧面展开图为 4 个三角形，所以该几何体是三棱锥．

【详解】解：∵侧面展开图为 4 个三角形，

∴该几何体是三棱锥，

故选 C．

2.【答案】B

【分析】此题考查科学记数法的表示方法：$a\times10^{n}$，$1\le a<10$，n 是整数，大于 10 的数的整数位数减去 1 即是 n 的值，据此解答．

【详解】$10000000000=1\times10^{10}$，

故选：B．

3.【答案】D

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念，对各选项分析判断即可得解．把一个图形绕某一点旋转 $180°$，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形．

本题考查了中心对称图形和轴对称图形，熟练掌握中心对称图形和轴对称图形的概念是解题的关键．

【详解】解：A．不是中心对称图形，是轴对称图形，故本选项不符合题意；

B．是中心对称图形，不是轴对称图形，故本选项不合题意；

C．不是中心对称图形，是轴对称图形，故本选项符合题意；

D．既是中心对称图形也是轴对称图形，故本选项合题意．

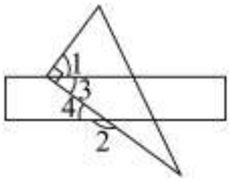
故选：D．

4.【答案】D

【分析】本题主要考查了平行线的性质，三角板中角度的计算，熟知两直线平行，内错角相等是解题的关键．

根据平行线的性质得到 $\angle3=\angle4=35°$，再由邻补角互补即可得出结果．

【详解】解：如图所示：



$\angle1+\angle3=90°$，

$\because \angle 1=55^{\circ}$，

$\therefore \angle 3=35^{\circ}$，

由题意得，直尺的两边平行，

$\therefore \angle 3=\angle 4=35^{\circ}$，

$\therefore \angle 2=180^{\circ}-\angle 4=145^{\circ}$，

故选 D．

5．【答案】A

【分析】本题考查列表法与树状图法，列表可得出所有等可能的结果数以及两次都摸到蓝球的结果数，再利用概率公式可得出答案．

【详解】解：列表如下：

	红	蓝
红	（红，红）	（红，蓝）
蓝	（蓝，红）	（蓝，蓝）

共有 4 种等可能的结果，其中两次都摸到蓝球的结果有 1 种，

$\therefore$两次都摸到蓝球的概率为$\frac{1}{4}$．

故选：A．

6．【答案】A

【分析】本题考查了不等式的性质．熟练掌握不等式的性质是解题的关键．

由$-2<a<-1$，可得$1<-a<2$，然后判断作答即可．

【详解】解：$\because -2<a<-1$，

$\therefore 1<-a<2$，

$\therefore a<1<-a<2$，

故选：A．

7．【答案】C

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，一元二次方程根的判别式，解题的关键在于能够熟练掌握一元二次方程的定义和一元二次方程根的判别式．

根据一元二次方程的定义以及根的判别式的意义可得$\Delta=1^{2}-4k\times(-2)\geq 0$且$k\neq 0$，求出$k$的取值范围即可．

【详解】解：$\because$一元二次方程$kx^{2}+x-2=0$有两个实数根，

$\therefore \begin{cases}\Delta=1^{2}-4k\times(-2)\geq 0\\ k\neq 0\end{cases}$，

$\therefore k \geq -\dfrac{1}{8}$ 且 $k \neq 0$，

故选 C.

8.【答案】B

【分析】本题主要考查了勾股定理，公式法解一元二次方程，关键在于找出各边的几何关系.

【详解】解：$\because$ 在 $Rt\triangle BDC$ 中，$BD^2 + CD^2 = BC^2$，即 $n^2 + h^2 = a^2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC^2 + AC^2 = AB^2$，即 $a^2 + b^2 = (m+n)^2$，

$\therefore n^2 + h^2 = a^2 < a^2 + b^2 = (m+n)^2$，

即 $n^2 + h^2 < (m+n)^2$，

故①正确.

$\because$ 在 $Rt\triangle BDC$ 中，$n^2 = a^2 - h^2$，

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$m^2 = b^2 - h^2$，

$\therefore n^2 + m^2 = a^2 + b^2 - 2h^2$，

又 $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$a^2 + b^2 = (m+n)^2$，

$\therefore n^2 + m^2 = (m+n)^2 - 2h^2$，

即 $n^2 + m^2 = n^2 + m^2 + 2mn - 2h^2$，

即 $2mn = 2h^2$，

$\therefore (m^2 + n^2) - 2h^2 = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2 > 0\,(m \neq n)$，

$\therefore m^2 + n^2 > 2h^2$，

故②错误.

$\because DE = BE - BD = BC - BD = a - n$，

$\therefore AE = AD - DE = m - (a-n) = m + n - a$，

$\because x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的实数根为：

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{-2a \pm 2(m+n)}{2} = -a \pm (m+n),$$

$\therefore AE$ 的长是关于 x 的方程 $x^2 + 2ax - b^2 = 0$ 的一个实数根，

故③正确.

综上①③正确，

故选：B.

第二部分 非选择题

二、填空题 (共 16 分，每题 2 分)

9.【答案】$x \geq 3$

【分析】此题主要考查了分式有意义及二次根式有意义的条件，正确掌握相关定义是解题关键．由分式有意义及二次根式有意义的条件，进而得出x的取值范围．

【详解】由二次根式的概念，可知$x-3 \geq 0$，

解得$x \geq 3$．

故答案为：$x \geq 3$

10.【答案】$y\left(x-6\right)^2$

【分析】本题考查了因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键．

先提取公因式，再运用完全平方公式进行分解即可．

【详解】解：$x^2y-12xy+36y=y\left(x^2-12x+36\right)=y\left(x-6\right)^2$．

故答案为：$y\left(x-6\right)^2$．

11.【答案】$x=-1$

【分析】本题考查了解分式方程，熟练掌握解法是解决本题的关键．

先去分母，转化为一元整式方程，再求解即可．

【详解】解：$4\left(x-2\right)=3\left(3x-1\right)$，

$4x-8=9x-3$，

解得：$x=-1$，

经检验：$x=-1$是原方程的根，

所以，原方程的根为：$x=-1$，

故答案为：$x=-1$．

12.【答案】-4

【分析】本题考查了反比例函数的性质，根据题意，$\left(-1,8\right)$和点$\left(2,n\right)$，都满足解析式$y=\frac{k}{x}\left(k \neq 0\right)$，即可求解．熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键．

【详解】解：$\because$反比例函数$y=\frac{k}{x}\left(k \neq 0\right)$的图象经过点$\left(-1,8\right)$和$\left(2,n\right)$，

$\therefore -1 \times 8=2n$，

解得：$n=-4$

故答案为：-4．

13.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】本题考查平行四边形的性质，相似三角形的判定和性质，关键是由$\triangle FAE \backsim \triangle CDE$，推出$\frac{AE}{DE}=\frac{AF}{CD}$．

由平行四边形的性质得到 $AB // CD$，$CD = AB = 2$，推出 $\triangle FAE \backsim \triangle CDE$，得到 $\frac{AE}{DE} = \frac{AF}{CD}$，而 $AF = 1$，于是得到 $\frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$.

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB // CD$，$CD = AB = 2$，

$\therefore \triangle FAE \backsim \triangle CDE$，

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{AF}{CD}$，

$\because AF = 1$，

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

14.【答案】25

【分析】本题考查了圆的内接四边形性质，圆周角定理等知识，利用圆的内接四边形的性质求出 $\angle BCD$ 的性质，然后利用圆周角定理求解即可.

【详解】解：$\because \odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB = 130°$，

$\therefore \angle BCD = 180° - \angle DAB = 50°$，

$\because$ 点 A 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，

$\therefore AD = AB$，

$\therefore \angle ACD = \angle ACB = \frac{1}{2}\angle BCD = 25°$，

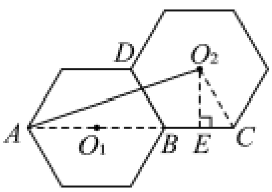
故答案为：25.

15.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{5}$

【分析】本题考查正多边形和圆，掌握正六边形的性质，直角三角形的边角关系以及锐角三角函数的定义是正确解答的关键．连接 O_2C，过 O_2 点作 $O_2E \perp BC$，垂足为 E，

根据正六边形的性质，直角三角形的边角关系以及锐角三角函数的定义进行计算即可.

【详解】解：如图，连接 O_2C，过 O_2 点作 $O_2E \perp BC$，垂足为 E，



设正六边形的边长为 a，则 $O_1A = O_1B = O_2C = a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_2CE$ 中，$O_2C = a, \angle CO_2E = 360° \div 6 \div 2 = 30°$，

$\therefore EC=\frac{1}{2}O_2C=\frac{1}{2}a=BE$， $O_2E=\frac{\sqrt{3}}{2}O_2C=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$\therefore AE=2a+\frac{1}{2}a=\frac{5}{2}a$，

$\therefore \tan\angle O_2AC=\frac{O_2E}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{5}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{5}$．

16.【答案】 ①. 1 ②. 19

【分析】本题考查了有理数四则混合运算的应用，熟练掌握四则运算法则是解题关键．根据第 1 个数是第 2 个数的倍数可得第 2 个空格所填入的数；先得出这 37 个数的和也是第 37 个数的倍数，再求出这 37 个数的和，由此即可得．

【详解】解：∵第 1 个空格填入 37，第 1 个数是第 2 个数的倍数，

∴第 2 个空格所填入的数为 1，

∵前 36 个数的和是第 37 个数的倍数，

∴这 37 个数的和也是第 37 个数的倍数，

又∵$1+2+3+\cdots+37$

$=\left(1+37\right)+\left(2+36\right)+\cdots+\left(18+20\right)+19$

$=38\times18+19$

$=703$

$=37\times19$，

∴第 37 个空格所填入的数为 19，

故答案为：1，19．

17.【答案】-5

【分析】本题考查的是含特殊角的三角函数值的混合运算，掌握运算顺序是解本题的关键，先计算绝对值，负整数指数幂，代入三角函数值，化简二次根式，再合并即可．

【详解】解：$\left|-\sqrt{3}\right|-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}+2\sin60^\circ-\sqrt{12}$

$=\sqrt{3}-5+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}$

$=-5$．

18.【答案】$x<3$

【分析】本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握一元一次不等式组的解法是解题的关键．分别求出两个不等式的解，再求公共解，即得答案．

【详解】原不等式组为 $\begin{cases} 2(x+1) < x+5? & ① \\ \dfrac{x+2}{3} \geq \dfrac{x-1}{2} & ② \end{cases}$

解不等式①，得 $x<3$，

解不等式②，得 $x \leq 7$，

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $x<3$.

19.【答案】9

【分析】本题考查了整式的化简求值，利用整体代入法解答是解题的关键．先化简原式，再将 $x^2-x-4=0$ 变形为 $x^2-x=4$，最后将 $x^2-x=4$ 以整体的形式代入原式，即得答案.

【详解】$(x-2)^2+(x-1)(x+3)$

$=(x^2-4x+4)+(x^2+2x-3)$

$=2x^2-2x+1$，

$\because x^2-x-4=0$，

$\therefore x^2-x=4$，

$\therefore$ 原式 $=2(x^2-x)+1=9$.

20.【答案】（1）见详解　（2）32

【分析】（1）根据等腰三角形三线合一的性质得出 $EF=DF$，再证 $\triangle GEF$ 和 $\triangle ADF$ 全等，得出 $EF=DF$，于是根据对角线相互平分的四边形 $AEGD$ 是平行四边形，再根据一组邻边相等的平行四边形是菱形即可得出四边形 $AEGD$ 是菱形；

（2）分别求出 AF 、 EF 的长，即可得出对角线 AG 、 ED 的长，根据菱形的面积公式计算即可.

【小问 1 详解】

证明：$\because AE=AD$， $AF \perp BD$，

$\therefore EF=DF$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$，

$\because EG \parallel BC$，

$\therefore AD \parallel EG$，

$\therefore \angle GEF=\angle ADF$，

在 $\triangle GEF$ 和 $\triangle ADF$ 中，

$\begin{cases} \angle GEF=\angle ADF \\ EF=DF \\ \angle EFG=\angle DFA \end{cases}$，

$\therefore \triangle GEF \cong \triangle ADF(\text{ASA})$，

$\therefore GF=AF$，

$\because EF=DF$，

$\therefore$四边形 $AEGD$ 是平行四边形，

$\because AE=AD$，

$\therefore$四边形 $AEGD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：$\because AF\perp BD$，$AF=BF$，

$\therefore \triangle AFB$ 是等腰直角三角形，

$\because AB=4$，

$\therefore$由勾股定理得，$AF=BF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 4=2\sqrt{2}$，

$\because \tan\angle AEF=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{AF}{EF}=\frac{1}{2}$，

即 $\frac{2\sqrt{2}}{EF}=\frac{1}{2}$，

$\therefore EF=4\sqrt{2}$，

$\because$四边形 $AEGD$ 是菱形，

$\therefore AG=2AF=4\sqrt{2}$，$ED=2EF=8\sqrt{2}$，

$\therefore$菱形 $AEGD$ 的面积 $\frac{4\sqrt{2}\times 8\sqrt{2}}{2}=32$．

【点睛】本题考查了菱形的判定与性质，平行四边形的性质，勾股定理，锐角三角函数，菱形的面积等，熟练掌握这些知识点是解题的关键．

21.【答案】购买围棋的套数不能是所购买象棋套数的 2 倍，理由见解析

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用．熟练掌握二元一次方程组的应用是解题的关键．

设购买 x 套围棋，y 套象棋，假设所购买围棋的套数能是所购买象棋套数的 2 倍，依题意得，$\begin{cases}40x+30y=1000\\ x=2y\end{cases}$，计算求解，然后判断作答即可．

【详解】解：设购买 x 套围棋，y 套象棋，假设所购买围棋的套数能是所购买象棋套数的 2 倍，

依题意得，$\begin{cases}40x+30y=1000\\ x=2y\end{cases}$，

解得，$y=\frac{100}{11}$，

$\because y$ 不为正整数，

$\therefore$不合题意．

答：所购买围棋的套数不能是所购买象棋套数的 2 倍．

22.【答案】（1）函数的解析式为 $y=x+2$，点 C 的坐标为 $\left(0,2\right)$

（2）$n\geqslant 10$

【分析】本题考查了待定系数法求函数解析式及解不等式，

（1）利用待定系数法即可求得函数解析式，当 $x=0$ 时，求出 $y=2$ 即可求解.

（2）根据题意结合解出不等式 $-3x+n>x+2$ 结合 $x<2$，即可求解.

【小问 1 详解】

解：将 $A\left(3,5\right),B\left(-2,0\right)$，代入函数解析式得，

$\begin{cases}3k+b=5\\-2k+b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=1\\b=2\end{cases}$，

∴函数的解析式为：$y=x+2$，

当 $x=0$ 时，$y=2$，

∴点 C 的坐标为 $\left(0,2\right)$.

【小问 2 详解】

解：由题意得，$-3x+n>x+2$，

即 $x<\dfrac{n-2}{4}$，

又 $x<2$，

∴ $\dfrac{n-2}{4}\geq 2$，

解得：$n\geqslant 10$，

∴n 的取值范围为 $n\geqslant 10$.

23.【答案】（1）9.4，10

（2）① 甲，②9.3，9.6

（3）160 串

【分析】（1）根据中位数和众数的概念，即可求解；

（2）①根据方差的定义，即可求解；

②根据题意可知，剩余两个山楂的重量应该尽可能大，且接近已有的三个山楂的重量，以保证方差最小，据此解答即可.

（3）已知总重量和调查的平均数，用总数量除以调查的平均数先求出大概有多少个山楂，

再用山楂数除以每串冰糖葫芦的山楂数即可求出能制作多少串冰糖葫芦.

【小问 1 详解】

解：根据甲的折线图可以看出，这组数据从小到大排列，中间第 8 个数为 9.4，

也就是说这组数据的中位数为 9.4，所以 $m=9.4$；

根据乙同学的山楂重量数据可以发现，重量为 10 克出现的次数最多，

也就是说这组数据的众数为 10，所以$n=10$.

【小问 2 详解】

解：①根据题意可知甲同学的 5 个冰糖葫芦重量分布于$9.1-9.2$之间，乙同学的 5 个冰糖葫芦重量分布于$8.8-9.4$，

从中可以看出，甲同学的 5 个数据比乙同学的 5 个数据波动较小，

所以，甲同学的 5 个冰糖葫芦重量的方差较小，故甲同学冰糖葫芦品相更好.

②∵要求数据的差别较小，山楂重量尽可能大，

∴可供选择的有 9.3、9.6、9.9，

当剩余两个为 9.3、9.6，这组数据的平均数为 9.48，

方差为：$[(9.3-9.48)^2+(9.4-9.48)^2+(9.5-9.48)^2+(9.6-9.48)^2+(9.6-9.48)^2]\times\frac{1}{5}=0.0136$，

当剩余两个为 9.6、9.9，这组数据的平均数为 9.6，

方差为：$[(9.4-9.6)^2+(9.5-9.6)^2+(9.6-9.6)^2+(9.6-9.6)^2+(9.9-9.6)^2]\times\frac{1}{5}=0.028$，

当剩余两个为 9.3、9.9，这组数据平均数为 9.54，

方差为：$[(9.3-9.54)^2+(9.4-9.54)^2+(9.5-9.54)^2+(9.6-9.54)^2+(9.9-9.54)^2]\times\frac{1}{5}=0.0424$，

据此，可发现当剩余两个为 9.3、9.6，方差最小，山楂重量也尽可能大.

【小问 3 详解】

解：7.6 千克$=7600$克，

$7600\div9.5=800$（个），

$800\div5=160$（串），

答：能制作 160 串冰糖葫芦.

【点睛】本题考查了折线统计图，平均数，众数，中位数和方差，熟记方差的计算公式以及方差的意义是解题的关键.

24.【答案】（1）见解析　（2）12

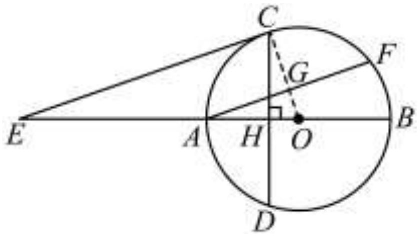
【分析】本题考查切线的性质，全等三角形的判定和性质，解直角三角形，掌握切线的性质是解题的关键.

（1）连接OC，OC与AF交于点 G，根据切线的性质得到$\angle OCE=90^\circ$，根据垂径定理得到$AF=2AG$，然后证明$\triangle OAG\cong\triangle OCH$即可得到结论；

（2）在$\mathrm{Rt}\triangle OCH$和$\mathrm{Rt}\triangle OCE$运用解直角三角形得到OE长，然后利用$AE=OE-OA$解题即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图，连接OC，OC与AF交于点 G.



$\because$ CE 与$\odot O$ 相切，切点为 C，

$\therefore CE\perp OC$.

$\therefore \angle OCE=90^{\circ}$.

$\because$ $AF \parallel CE$，

$\therefore$ $\angle OGA=\angle OCE=90^{\circ}$.

$\therefore$ $OC\perp AF$ 于点 G.

$\therefore$ $AF=2AG$.

$\because CD\perp AB$ 于点 H，

$\therefore \angle OHC=90^{\circ}$， $CD=2CH$.

$\therefore \angle OGA=\angle OHC$.

又$\because$ $\angle AOG=\angle COH$， $OA=OC$，

$\therefore$ $\triangle OAG\cong\triangle OCH$.

$\therefore AG=CH$.

$\therefore AF=CD$；

【小问 2 详解】

解: $\because$ $\odot O$ 的半径为 6， $AH=2OH$，

$\therefore OH=2$， $AH=4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCH$ 中， $\angle OHC=90^{\circ}$，$\cos\angle COH=\dfrac{OH}{OC}=\dfrac{1}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中， $\angle OCE=90^{\circ}$，$\cos\angle COE=\dfrac{1}{3}$，$OC=6$，

$\therefore OE=\dfrac{OC}{\cos\angle COE}=18$，

$\therefore$ $AE=OE-OA=18-6=12$.

25.【答案】(1) 见解析　(2) 见解析

(3) ①见解析；②0.5 或1

【分析】(1) 根据等边三角形的性质，得出此时点 Q 在点 C 处，从而得出 $S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，即可得出答案；

(2) 根据解析 (1) 得出的数据，先描点，再连线即可；

（3）①连接 AO 并延长交 BC 于点 D，连接 OB，根据等边三角形的性质求出 $OA=\frac{2}{3}AD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当 $\triangle APQ$ 是等腰三角形时，$AP=AQ$，根据 $\angle PAQ=60°$，证明 $\triangle PAQ$ 为等边三角形，解直角三角形求出 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$，在函数图象上描出该点即可；

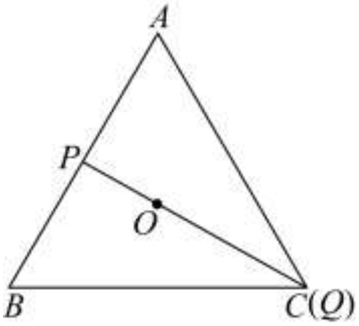
②根据函数图象，得出 y_2 取最大值时 x 的值即可.

【小问 1 详解】

解：当 $x=0.5$ 时，点 P 为 AB 的中点，

∵点 O 为边长为 1 的等边三角形 ABC 的外心，

∴此时点 Q 在点 C 处，如图所示：



∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 P 为 AB 的中点，点 Q 在点 C 处，

∴ $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

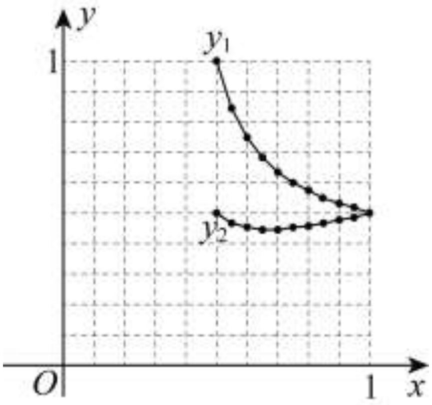
∴ $y_2=\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=0.5$；

填报如下：

x	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
y_1	1	0.8462	0.75	0.6842	0.6364	0.6	0.5714	0.5484	0.5294	0.5135	0.5
y_2	0.5	0.4654	0.45	0.4447	0.4455	0.45	0.4571	0.4661	0.4765	0.4878	0.5

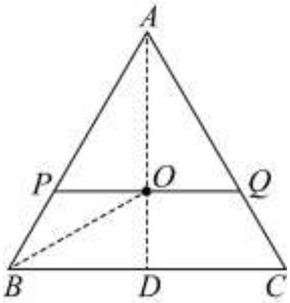
【小问 2 详解】

解：如图所示：



【小问 3 详解】

解：①连接 AO 并延长交 BC 于点 D，连接 OB，如图所示：



$\because$ $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，

$\therefore \angle OBD=\angle BAD=30^{\circ}$，$AD\perp BC$，$BD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}$，$OA=OB$，

$\therefore OD=\dfrac{1}{2}OB$，$AD=\sqrt{AB^{2}-BD^{2}}=\sqrt{1^{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore OA=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

当$\triangle APQ$ 是等腰三角形时，$AP=AQ$，

$\because \angle PAQ=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle PAQ$ 为等边三角形，

$\therefore \angle APQ=60^{\circ}$，

$\therefore \angle APQ=\angle ABC$，

$\therefore PQ\parallel BC$，

$\therefore \angle AOP=\angle ADB=90^{\circ}$，

$\therefore AP=\dfrac{AO}{\cos 30^{\circ}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore AQ=AP=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$此时在 y_1 关于 x 的函数图象上标出点$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，如图所示：

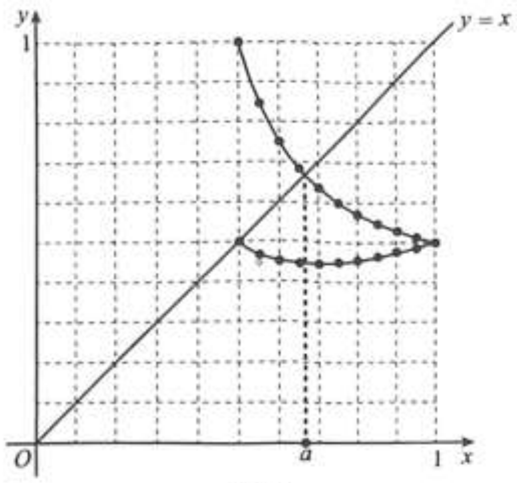


图 3

②根据函数图象可知，函数 y_2 的最大值为0.5，此时 $x=0.5$ 或 $x=1$．

26.【答案】（1）-1

（2）$1\le t\le 3$

【分析】本题考查了二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键．

（1）把 A 点的坐标代入解析式求得 $b=2a$，然后利用对称轴公式即可求得；

（2）由题意可知点 $A(-2,y_1)$ 在对称轴的左侧，$C(m,y_3)$ 在对称轴的右侧，点 $A(-2,y_1)$ 关于直线 $x=t$ 的对称点为$(2t+2)$，$B(2,y_2)$ 关于直线 $x=t$ 的对称点为$(2t-2)$，分两种情况讨论，得到关于 t 的不等式组，解不等式组从而求得 t 的取值范围．

【小问 1 详解】

解：$\because$点 $A(-2,3)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+3(a>0)$ 上，

$\therefore 3=4a-2b+3$，

$\therefore b=2a$，

$\therefore t=-\dfrac{b}{2a}=-1$；

【小问 2 详解】

解：$\because a>0$，

$\therefore$抛物线 $y=ax^2+bx+3(a>0)$ 开口向上，

当 $x>t$ 时，y 随 x 的增大而增大，

$\because$当 $t+1<m<t+2$ 时，都有 $y_1>y_3>y_2$，

$\therefore$点 $A(-2,y_1)$ 在对称轴的左侧，$C(m,y_3)$ 在对称轴的右侧，

$\because$点 $A(-2,y_1)$，$B(2,y_2)$，$C(m,y_3)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+3(a>0)$ 上，

$\therefore$点 $A(-2,y_1)$ 关于直线 $x=t$ 的对称点为 $(2t+2)$，$B(2,y_2)$ 关于直线 $x=t$ 的对称点为 $(2t-2)$，

当 $t\ge 2$ 时，则 $\begin{cases}2t+2>t+2\\2t-2\le t+1\end{cases}$，解得 $0<t\le 3$，

$\therefore 2\le t\le 3$；

当 $t<2$ 时，则 $\begin{cases}2t+2>t+2\\t+1\ge 2\end{cases}$，解得 $1\le t<2$，

综上所述，t 的取值范围为 $1\le t\le 3$.

27.【答案】（1）$67.5°$

（2）$CF=2MP+\sqrt{2}AB$，证明见解析

【分析】（1）根据等腰三角形的性质求得 $\angle 3=45°$，再根据等腰三角形性质与三我内角和定理求得 $\angle 2=67.5°$，然后由余角性质得出 $\angle BDF=\angle 2$，即可求解.

（2）作 $CQ\parallel AP$ 交 BE 于点 Q，利用相似三角形的性质求得 $CQ=2MP$，证明 $\triangle BDF\cong\triangle CEQ$，得到 $BF=CQ$，由勾股定理得 $BC=\sqrt{2}AB$，即可由 $CF=BF+BC=CQ+\sqrt{2}AB$，得出结论.

【小问 1 详解】

解：如图 4.

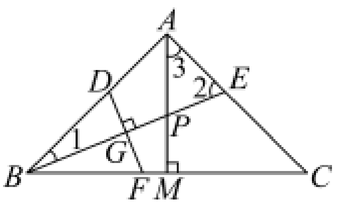


图4

$\because$在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\angle ACB=45°$，

$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$\angle 1+\angle 2=90°$.

$\because AM\perp BC$ 于点 M，

$\therefore \angle 3=\dfrac{\angle BAC}{2}=45°$，$BM=CM$.

$\because AP=AE$，

$\therefore \angle 2=\dfrac{180°-\angle 3}{2}=\dfrac{180°-45°}{2}=67.5°$.

$\because DF\perp BE$ 于点 G，

$\therefore \angle 1+\angle BDF=90°$，

$\therefore \angle BDF=\angle 2=67.5°$.

【小问 2 详解】

解：补全图形，如图 5．

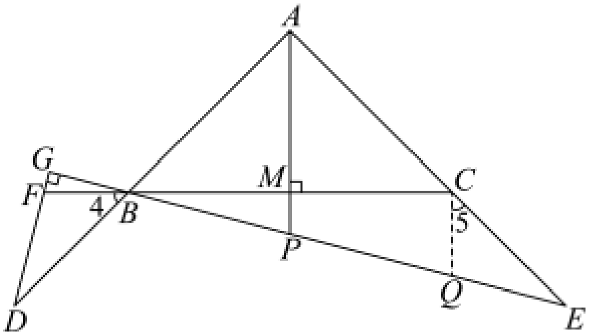


图5

$CF = 2MP + \sqrt{2}AB.$

证明：如图 5，作 $CQ \parallel AP$ 交 BE 于点 Q.

$\because CQ \parallel AP$，

$\therefore \triangle BMP \backsim \triangle BCQ$

$\therefore \dfrac{MP}{CQ} = \dfrac{BM}{BC}$，

$\because BM=CM$，$AM \perp BC$，

$\therefore \dfrac{MP}{CQ} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{2}$，$\angle BCQ = \angle AMC = 90°$

$\therefore CQ = 2MP$，$\angle 5 = 180° - \angle ACB - \angle BCQ = 45°.$

$\because \angle 4 = \angle ABC = 45°$，

$\therefore \angle 4 = \angle 5$，

$\because \angle DBG = \angle ABE$，$DG \perp BE$ 于点 G，$\angle BAC = 90°$，

$\therefore \angle D = \angle E$

$\because AD = AE$，$AB = AC$，

$\therefore AD - AB = AE - AC$，即 $BD = CE$.

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CEQ$

∴． $BF = CQ.$

$\because CF = BF + BC$，$BC = \sqrt{2}AB$,

$\therefore CF = CQ + \sqrt{2}AB = 2MP + \sqrt{2}AB.$

【点睛】本题考查等腰直角三角形的性质，勾股定理，三角形内角和定理，角平分线有关的角的计算，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质．熟练掌握等腰直角三角形的性质是解题的关键．

28.【答案】（1）Q_2，Q_3

（2）$2 \le m \le 2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2} \le m \le -2$

（3）$2-\sqrt{2}$

【分析】（1）先得出直线 l 为 $y=0$，根据轴对称得出 $P_1'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_2'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 进而可得 $P_1P_1'=\sqrt{3}$，$P_2P_2'=\sqrt{2}$，勾股定理求得点 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 与原点的距离，进而根据新定义即可求解；

（2）依题意，$0\le PP'\le 2$ 当线段 AB 上存在一个点到原点的距离为 2 时，则符合题意，进而分 $m>0,m<0$ 画出图形，即可求解；

（3）根据题意，画出图形，就点 P 的位置，分类讨论，根据新定义即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵当 $a=0$ 时，直线 l 为 $y=0$，即 x 轴，

$\because P_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\therefore P_1'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_2'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\therefore P_1P_1'=\sqrt{3}$，$P_2P_2'=\sqrt{2}$，

$\because Q_1(1,2)$，$Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，$Q_3(-1,-1)$，$Q_4\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

$\therefore OQ_1=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$OQ_2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，$OQ_3=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$OQ_4=\sqrt{2+2}=2$，

∴点 P_1 关于直线 l 的“衍生点”是 Q_2，点 P_2 关于直线 l 的“衍生点”是 Q_3，

故答案为：Q_2，Q_3.

【小问 2 详解】

解：依题意，$0\le PP'\le 2$，

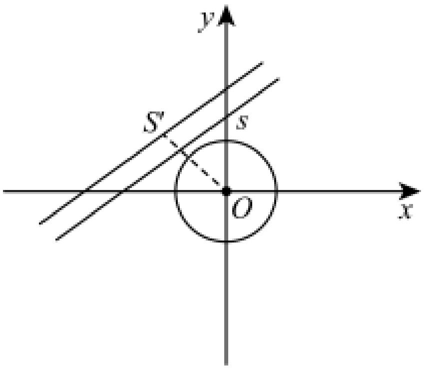
由（2）可得当点 S 是点 P 关于直线 l 的“衍生点”则 $OS\le 2$，

∵ P 为 $\odot O$ 上任意一点，直线 $y=x+m$ $(m\ne 0)$ 与 x 轴，y 轴的交点分别为点 A，B.

$\therefore OA=OB=m$，

∴当线段 AB 上存在一个点到原点的距离为 2 时，

当 $m>0$ 时，如图所示，



当$OS=2$时，即S与B点重合时，存在点S是点P关于直线l的“衍生点”，则$m=2$

则AB（除端点外）上所有的点到O的距离都<2，

∵对称轴为直线$y=ax$，不能为y轴，则$\left(0,2\right)$和$\left(-2,0\right)$不是点P关于直线l的“衍生点”，则$m=2$符合题意，

∵线段AB上存在点S，T，使得点S是点P关于直线l的“衍生点”，点T不是点P关于直线l的“衍生点”，

∴m ≥ 2，

当$OS'\perp y=x+m$，此时OS'最短，则当$OS'=2$时，$m=2\sqrt{2}$，此时只有1个点到O的距离为2，其他的点都不是点P关于直线l的“衍生点”，

∴$2\le m\le 2\sqrt{2}$；

根据对称性，当$m<0$时，可得$-2\sqrt{2}\le m\le -2$；

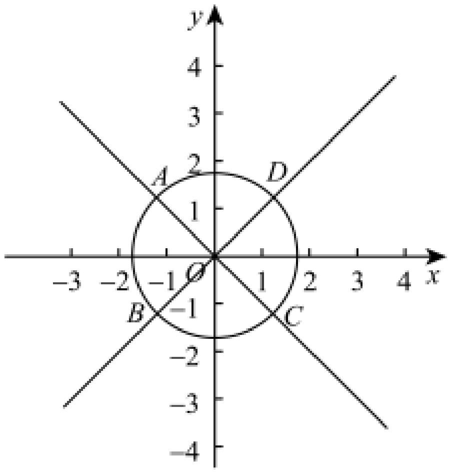
综上所述，$2\le m\le 2\sqrt{2}$或$-2\sqrt{2}\le m\le -2$

【小问3详解】

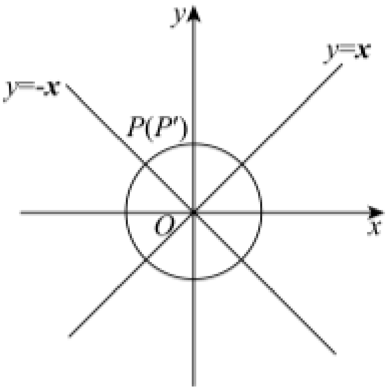
∵$-1\le a\le 1$时

∴随着a的变化，点P关于直线l的对称点P'始终在圆上，

如图所示，依题意，直线l是经过圆心，且经过AB的直线，s经过圆心，



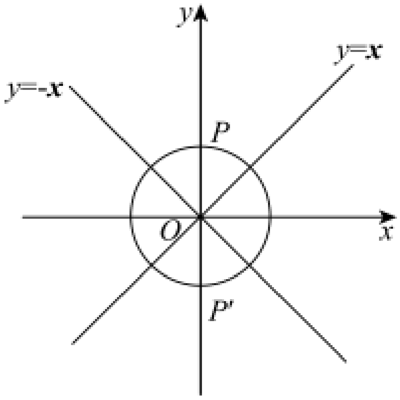
①当点P在AB（包括边界）上时，当P,P'重合时，当PP'为直径时，则$OQ=PP'=2$，



根据新定义可得$0\le PP'\le 2$，

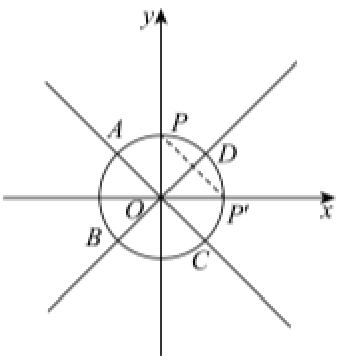
$\therefore D(s)=2$，

②当P点在AD的内部的圆弧上时（不包括边界），当PP'为直径时，则$OQ=PP'=2$，



则对于线段 MN 上任意一点R，都存在$\odot O$上的点P和直线l，使得点R是点P关于直线l的“衍生点”．

当P在y轴上时，两条边界线的正中间，则PP'的最小值为$\sqrt{2}$，



$\therefore \sqrt{2}\le PP'=OQ\le 2$即$D(s)=2-\sqrt{2}$

综上所述，$D(s)=2-\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了一次函数，圆的定义，轴对称的性质，勾股定理求线段长，理解新定义，熟练掌握几何变换是解题的关键．