

2024 北京房山初三一模



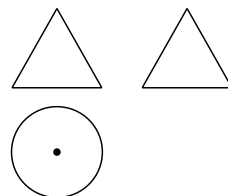
数 学

学校 _____ 班级 _____ 姓名 _____

本试卷共 8 页，满分 100 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。



1. 右图是某几何体的三视图，该几何体是

- (A) 圆锥 (B) 圆柱
(C) 三棱柱 (D) 球

2. 据中国国家铁路集团有限公司消息：在 2024 年为期 40 天的春运期间，全国铁路累计发送旅客 4.84 亿人次，日均发送 12 089 000 人次。将 12 089 000 用科学记数法表示应为

- (A) 12.089×10^6 (B) 1.2089×10^6 (C) 1.2089×10^7 (D) 0.12089×10^8

3. 下面四个博物馆标志，其文字上方的图案既是轴对称图形又是中心对称图形的是



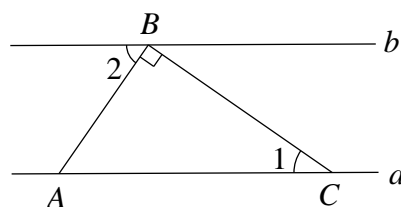
- (A) (B) (C) (D)

4. 如图， $a \parallel b$ ，点 A ， C 在直线 a 上，点 B 在直线 b 上，

$AB \perp BC$ ，

若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是

- (A) 25° (B) 35°
(C) 45° (D) 55°



5. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x - m = 0$ 有两个相等的实数根，则实数 m 的值为

- (A) -4 (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

6. 不透明的袋子中装有 1 个红球，1 个白球，除颜色外两个小球无其他差别，从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么两次都摸到红球的概率是

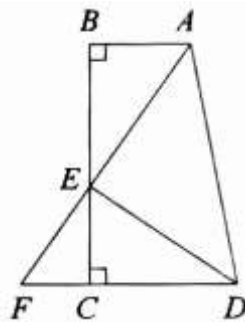
- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{4}{9}$

7. 若 $a < b < 0$ ，则下列结论正确的是

- (A) $-a < -b < a < b$ (B) $-b < -a < a < b$

- (C) $a < b < -b < -a$ (D) $a < b < -a < -b$

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle B = \angle BCD = 90^\circ$ ，点 E 在 BC 上， $CE < BE$ ，连接 AE



并延长交 DC 的延长线于点 F ，连接 DE ， $\triangle ABE \cong \triangle ECD$ 。给出下面三个结论：

- ① $AE \perp DE$ ；② $AB + CD > AE$ ；③ $\sqrt{2}AB \cdot EF = AD \cdot CF$ 。

上述结论中，所有正确结论的序号是

- (A) ①② (B) ②③
(C) ①③ (D) ①②③

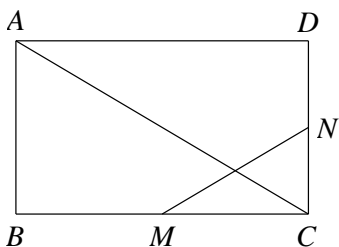
二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{2}{x-3}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____。
10. 分解因式： $x^2y - 4y =$ _____。
11. 方程 $\frac{4}{3x+5} = \frac{1}{x}$ 的解为_____。
12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若点 $A(-1, y_1)$ ， $B(-3, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上，
则 y_1 _____ y_2 （填“>”，“=”或“<”）。
13. 某校为了调查学生家长对课后服务的满意度，从 600 名学生家长中随机抽取 150 名进行问卷调查，获得了他们对课后服务的评分数据（评分记为 x ），数据整理如下：

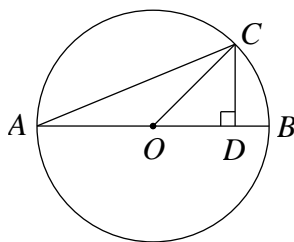
家长评分	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$	$80 \leq x < 90$	$90 \leq x \leq 100$
人数	15	45	60	30

根据以上数据，估计这 600 名学生家长评分不低于 80 分的有_____名。

14. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， M ， N 分别为 BC ， CD 的中点，则 $\frac{MN}{AC}$ 的值为_____。



第 14 题图



第 15 题图

15. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ，若 $AB = 4$ ， $\angle A = 22.5^\circ$ ，则 BD 的长为_____。
16. 在一次综合实践活动中，某小组用 I 号、II 号两种零件可以组装出五款不同的成品，编号分别为 A ， B ， C ， D ， E ，每个成品的总零件个数及所需的 I 号、II

号零件个数如下：

成品编号	I号零件个数	II号零件个数	总零件个数
A	3	4	7
B	5	4	9
C	4	6	10
D	4	3	7
E	6	2	8

选用两种零件总数不超过 25 个，每款成品最多组装一个。

- (1) 如果 I 号零件个数不少于 11 个，且不多于 13 个，写出一种满足条件的组装方案_____（写出要组装成品的编号）；
- (2) 如果 I 号零件个数不少于 11 个，且不多于 13 个，同时所需的 II 号零件最多，写出满足条件的组装方案_____（写出要组装成品的编号）。

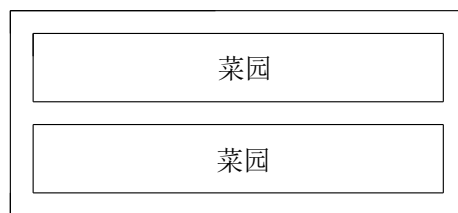
三、解答题（共 68 分，第 17-19 题，每题 5 分，第 20-21 题，每题 6 分，第 22-23 题，每题 5 分，第 24 题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 计算： $6\sin 45^\circ + (\frac{1}{2})^{-1} + |-3| - \sqrt{18}$.

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 4x - 7 > x - 1, \\ \frac{3x - 5}{2} < x. \end{cases}$$

19. 已知 $x - y - 3 = 0$ ，求代数式 $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2x - 2y}$ 的值。

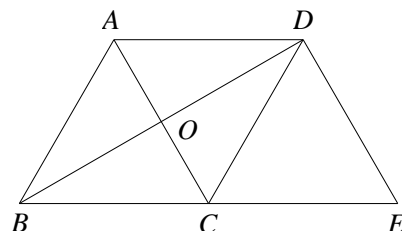
20. 在房山区践行“原色育人，生态发展”教育发展理念的引领下，某校为提升实践育人实效，积极组织 学生建设劳动基地，参与校园种植活动. 计划在校园内一块矩形的空地上开垦两块完全相同的矩形菜园，如图所示，已知空地长 10 米，宽 4.5 米，矩形菜园的长与宽的比为 6:1，并且预留的上、中、下、左、右通道的宽度相等，那么预留通道的宽度和矩形菜园的宽分别是多少米？



21. 如图，在 $\square ABCD$ 中， AC ， BD 交于点 O ， $\angle ABD = \angle CBD$ ，过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 延长线于点 E 。

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 若 $OB = \sqrt{3}$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，求 DE 的长。



22. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = 2x$ 的图象平移得到，且经过点 $(2, 3)$ 。

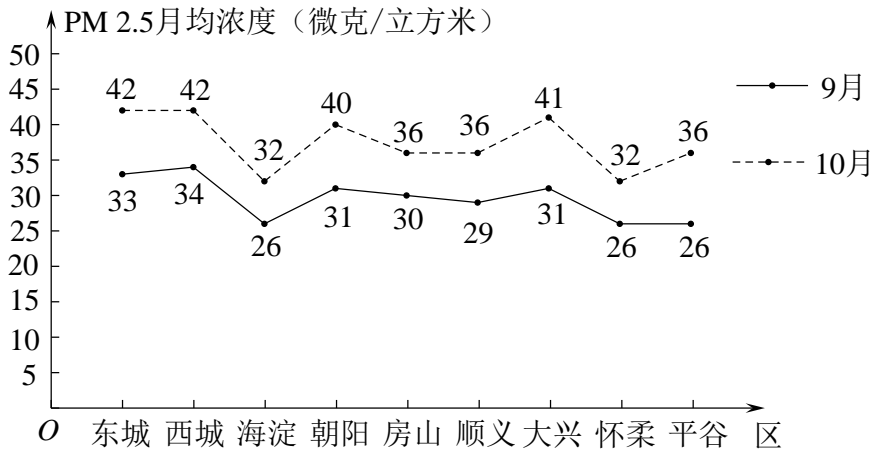
(1) 求该函数的解析式；

(2) 当 $x < 2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = x + m$ 的值大于函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

23. 2024年1月3日北京市生态环境局召开了“2023年北京市空气质量”新闻发布会，通报了2023年北京市空气质量状况：北京2023年PM2.5年均浓度为32微克/立方米，PM2.5最长连续优良天数为192天，“北京蓝”已成为常态.

下面对2023年北京市九个区PM2.5月均浓度的数据进行整理，给出了部分信息：

a. 2023年9月和10月北京市九个区PM2.5月均浓度的折线图：



b. 2023年9月和10月北京市九个区PM2.5月均浓度的平均数、中位数、众数：

PM2.5月均浓度	平均数	中位数	众数
9月	29.6	m	n
10月	37.4	36	36

(1) 写出表中 m , n 的值；

(2) 2023年9月北京市九个区PM2.5月均浓度的方差为 S_1^2 ，2023年10月北京市九个区PM2.5月均浓度的方差为 S_2^2 ，则 S_1^2 _____ S_2^2 (填“>”，“=”或“<”)；

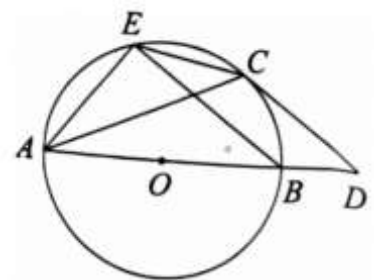
(3) 2013年至2023年，北京市空气优良级别达标天数显著增加，2013年空气优良达标天数为176天，2023年比2013年增幅达到约54%，2023年达标天数约为_____天.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 是 $\odot O$ 上一点，过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CD 与 AB 的

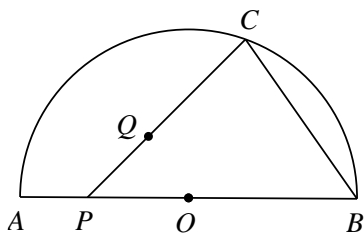
延长线交于点 D ，过点 B 作 $BE \parallel CD$ ， BE 与 $\odot O$ 交于点 E ，连接 AE ， CE .

(1) 求证： $\angle ACE = \angle D$ ；

(2) 若 $\tan \angle ACE = \frac{3}{4}$ ， $AE = 3$ ，求 CE 的长.



25. 如图, 点 P 是半圆 O 的直径 AB 上一动点, 点 Q 是半圆 O 内部的一定点, 作射线 PQ 交 AB 于点 C , 连接 BC . 已知 $AB=10\text{cm}$, 设 AP 的长度为 $x\text{cm}$, BC 的长度为 $y_1\text{cm}$, PC 的长度为 $y_2\text{cm}$. (当点 P 与点 A 重合时, x 的值为 0).

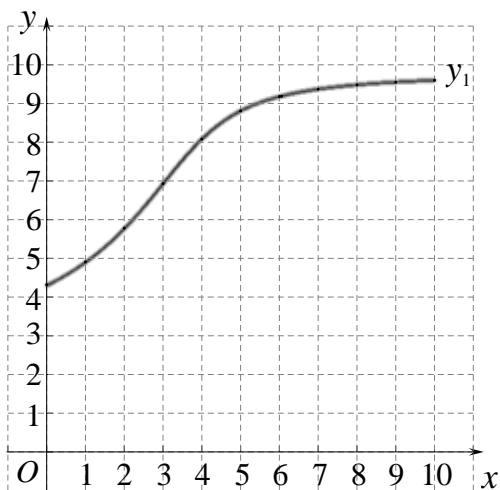


小山根据学习函数的经验, 对函数 y_1 , y_2 随自变量 x 的变化而变化的规律进行探究.

对于点 P 在 AB 上的不同位置, 画图、测量, 得到了 x , y_1 , y_2 的几组值, 如下表:

x/cm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1/cm	4.32	4.91	5.78	6.93	8.08	8.81	9.18	9.37	9.48	9.55	9.60
y_2/cm	9.02	7.86	6.63	5.46	4.79	5.00	5.73	6.64	7.61	8.60	9.60

- (1) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 小山已画出函数 y_1 的图象, 请你画出函数 y_2 的图象;



- (2) 结合函数图象, 解决问题:

- ① 当 AP 的长度为 6.5cm 时, 则 BC 的长度约为 _____ cm (结果保留小数点后一位).
- ② 当 $\triangle BCP$ 为等腰三角形时, 则 AP 的长度约为 _____ cm (结果保留小数点后一位).

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y=x^2-2ax+a^2-2$ 上任意两点.

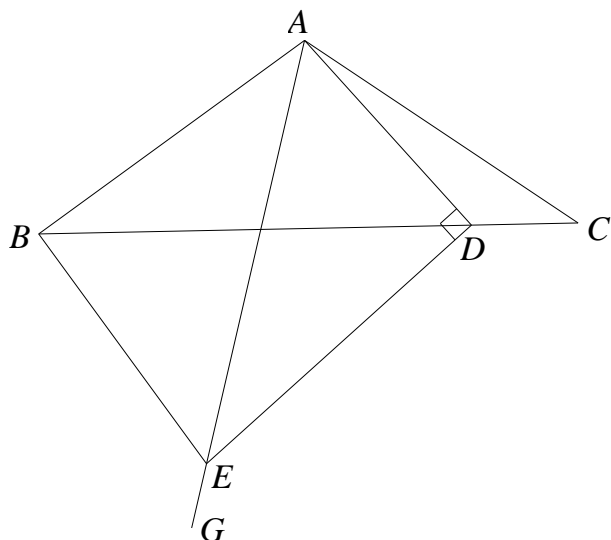
(1) 当 $a=1$ 时, 求抛物线与 y 轴的交点坐标及顶点坐标;

(2) 若对于 $0 < x_1 < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x_2 < 1$, 都有 $y_1 > y_2$, 求 a 的取值范围.

27. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle BAC=2\alpha(45^\circ < \alpha < 90^\circ)$, D 是 BC 上的动点(不与点 C 重合), 且

$BD > DC$, 连接 AD , 将射线 AD 绕点 A 顺时针旋转 α 得到射线 AG , 过点 D 作 $DE \perp AD$ 交射线 AG 于点 E , 连接 BE , 在 BD 上取一点 H , 使 $HD=CD$,

连接 EH .



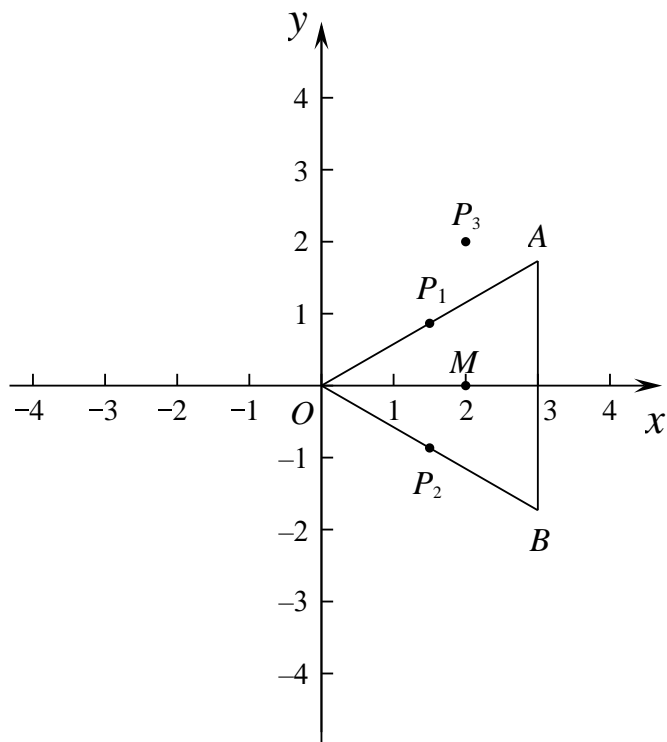
(1) 依题意补全图形;

(2) 直接写出 $\angle ABE$ 的大小, 并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将中心为 M 的等边三角形记作等边三角形 M , 对于等边三角形 M 和点 P (不与 O 重合) 给出如下定义: 若等边三角形 M 的边上存在点 N , 使得直线 OP 与以 MN 为半径的 $\odot M$ 相切于点 P , 则称点 P 为等边三角形 M 的“相关切点”.

(1) 如图, 等边三角形 M 的顶点分别为点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, -\sqrt{3})$.

①在点 $P_1(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_2(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_3(2, 2)$ 中, 等边三角形 M 的“相关切点”是_____;



②若直线 $y = x + b$ 上存在等边三角形 M 的“相关切点”，求 b 的取值范围；

- (2) 已知点 $M(m, m-2)$ ，等边三角形 M 的边长为 $2\sqrt{3}$ 。若存在等边三角形 M 的两个“相关切点” E, F ，使得 $\triangle OEF$ 为等边三角形，直接写出 m 的取值范围。

参考答案

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	B	C	C	D

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. $x \neq 3$

10. $y(x+2)(x-2)$

11. $x = 5$

12. $<$

13. 360

14. $\frac{1}{2}$

15. $2 - \sqrt{2}$

16. (1) 答案不唯一： ABD ； ACD ； ACE ； ADE ； BE ；

(2) ACD .

（注：第 16 题一空 1 分）

三、解答题（共 68 分，第 17-19 题，每题 5 分，第 20-21 题，每题 6 分，第 22-23 题，每题 5 分，第 24 题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解： $6\sin 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |-3| - \sqrt{18}$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + 3 - 3\sqrt{2}$$

$$= 5.$$

18. 解：原不等式组为
$$\begin{cases} 4x - 7 > x - 1, & \text{①} \\ \frac{3x - 5}{2} < x. & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，得 $x > 2$.

解不等式②，得 $x < 5$.

∴原不等式组的解集为 $2 < x < 5$.

19. 解: $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{2x - 2y}$

$$= \frac{(x - y)^2}{2(x - y)}$$

$$= \frac{x - y}{2}.$$

$$\because x - y - 3 = 0,$$

$$\therefore x - y = 3.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{x - y}{2} = \frac{3}{2}.$$

20. 解: 设矩形菜园的宽为 x 米, 则矩形菜园的长为 $6x$ 米.

由题意可得,

$$\frac{10 - 6x}{2} = \frac{4.5 - 2x}{3}.$$

解得 $x = 1.5$.

$$\therefore \frac{10 - 6x}{2} = 0.5.$$

答: 预留通道的宽度是 0.5 米, 矩形菜园的宽是 1.5 米.

21. (1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBD.$$

$$\because \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB.$$

$$\therefore AB = AD.$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) 解: \because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad BD = 2OB, \quad \angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABC.$$

$$\because DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BOC = 90^\circ.$$

$$\because OB = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = 2OB = 2\sqrt{3}.$$

$$\because \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ.$$

$$\text{在 Rt } \triangle BDE \text{ 中, } \tan \angle DBE = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad BD = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \tan \angle DBE = \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore DE = 2.$$

22. 解: (1) \because 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = 2x$ 的图象平移得到,

$$\therefore k = 2.$$

$$\therefore \text{得到函数的解析式为 } y = 2x + b.$$

$$\because \text{函数 } y = 2x + b \text{ 的图象过点 } (2, 3),$$

$$\therefore 2 \times 2 + b = 3.$$

$$\therefore b = -1.$$

$$\therefore \text{函数 } y = kx + b \text{ 的解析式为 } y = 2x - 1.$$

$$(2) \quad m \geq 1.$$

23. 解: (1) $m = 30, \quad n = 26;$

$$(2) <;$$

$$(3) 271.$$

24. (1) 证明: $\because AE = AE,$

$$\therefore \angle ACE = \angle ABE,$$

$$\text{又 } \because BE \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle D.$$

$$\therefore \angle ACE = \angle D.$$

(2) 解: 连接 OC , 交 BE 于点 F .

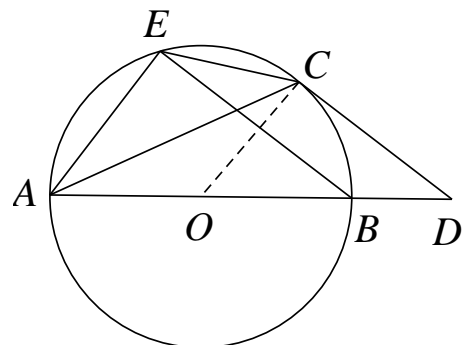
$$\because CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线, 切点为 } C,$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ.$$

$$\because BE \parallel CD,$$

$$\therefore \angle OFB = \angle OCD = 90^\circ.$$

$$\therefore BE \perp OC.$$



$\therefore F$ 为 BE 中点.

$\because O$ 为直径 AB 中点,

$\therefore OF$ 为 $\triangle AEB$ 的中位线,

$$\therefore OF = \frac{1}{2} AE.$$

$\because AE = 3,$

$$\therefore OF = \frac{3}{2}.$$

$\because AE = AE,$

$\therefore \angle ACE = \angle ABE.$

$$\because \tan \angle ACE = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan \angle ABE = \frac{3}{4}.$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

在 $\text{Rt} \triangle AEB$ 中

$$\because \tan \angle ABE = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BE = 4.$$

由勾股定理得 $AB = 5.$

$$\therefore OC = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore CF = 1.$$

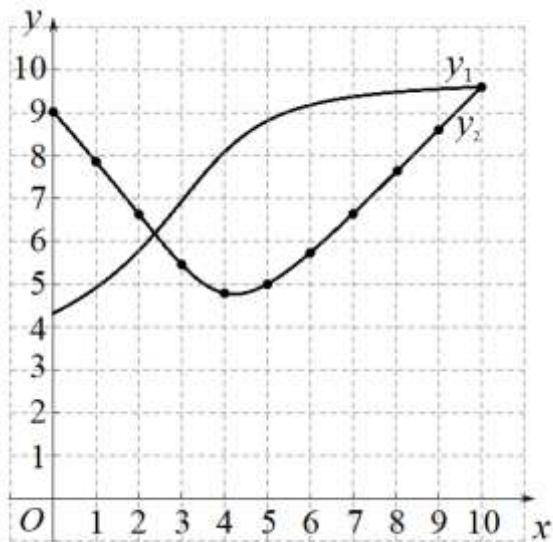
$\because F$ 为 BE 中点, $BE = 4,$

$$\therefore EF = 2.$$

在 $\text{Rt} \triangle ECF$ 中, 由勾股定理得

$$CE = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

25. (1) 画出函数 y_2 的图象, 如图.



(2) ① 9.2;

② 2.3, 3.1, 5.0.

26. 解: (1) 令 $x=0$, 则 $y=a^2-2$.

当 $a=1$ 时, $y=-1$.

\therefore 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, -1)$;

$\therefore y = x^2 - 2ax + a^2 - 2 = (x-a)^2 - 2$,

当 $a=1$ 时, 抛物线的顶点坐标为 $(1, -2)$.

(2) $\therefore A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 2$ 上任意两点,

$\therefore y_1 = (x_1 - a)^2 - 2, y_2 = (x_2 - a)^2 - 2$.

$\therefore y_1 - y_2 = (x_1 - a)^2 - (x_2 - a)^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2a)$.

$\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x_2 < 1$,

$\therefore x_1 < x_2, \frac{1}{2} < x_1 + x_2 < \frac{3}{2}$.

$\therefore x_1 < x_2, y_1 > y_2$,

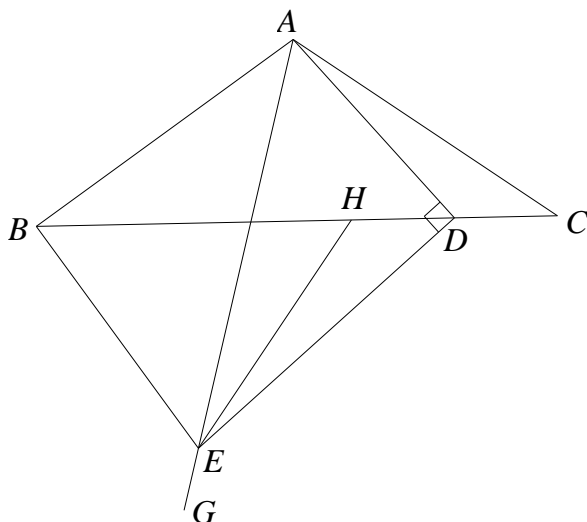
$\therefore x_1 + x_2 - 2a < 0$.

即 $x_1 + x_2 < 2a$.

$\therefore 2a \geq \frac{3}{2}$.

$\therefore a \geq \frac{3}{4}$.

27. (1) 依题意补全图形, 如图.



(2) $\angle ABE = 90^\circ$.

证明: 延长 ED 至点 M , 使 $DM = ED$, 连接 AM, CM .

在 $\triangle EHD$ 与 $\triangle MCD$ 中,

$$\begin{cases} HD = CD, \\ \angle EDH = \angle MDC, \\ ED = DM. \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EHD \cong \triangle MCD \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle EHD = \angle MCD.$$

$$\because AD \perp EM, ED = DM,$$

$$\therefore AE = AM.$$

$$\therefore \angle EAM = 2\angle EAD = 2\alpha.$$

$$\therefore \angle BAC = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAM.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACM \text{ (SAS)}.$$

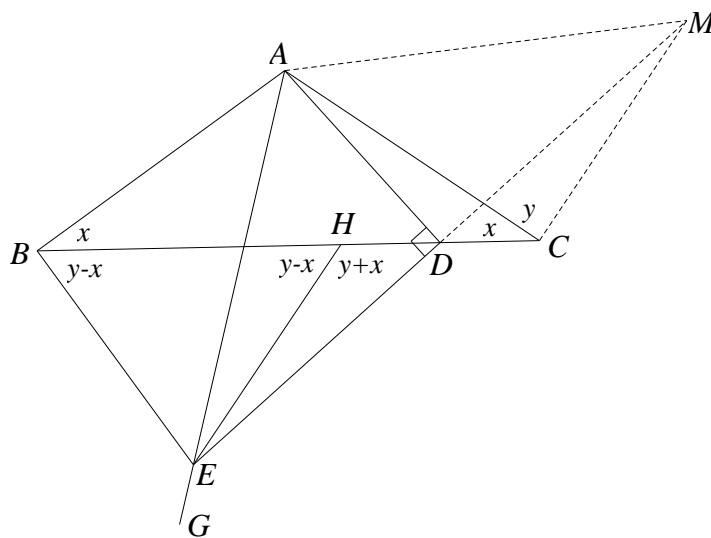
$$\therefore \angle ABE = \angle ACM.$$

$$\because EB = EM,$$

$$\therefore \angle EBH = \angle EHB.$$

设 $\angle ABC = x$, $\angle ACM = y$.

$$\therefore \angle EHD = \angle MCD = x + y, \angle ABE = \angle ACM = y.$$



$$\therefore \angle EHB = \angle EBH = y - x.$$

$$\therefore \angle EHB + \angle EHD = y - x + x + y = 180^\circ.$$

$$\therefore y = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ.$$

28. (1) ① P_1, P_2 ;

②解:依题意可知, 点 $M(2, 0)$, 点 N 为等边三角形边上的点,

则 $1 \leq MN \leq 2$.

$\therefore OP$ 与以 MN 为半径的 $\odot M$ 相切于点 P ,

$\therefore OP \perp MP, MP = MN$.

$\therefore \angle OPM = 90^\circ$.

\therefore 点 P 在以 OM 为直径的 $\odot Q$ 上,

且 $1 \leq MN \leq 2$, 其中点 $Q(1, 0)$.

\therefore 符合条件的点 P 组成的图形为 COD

(点 O 除外), 其中点 $C(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$$D(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

如图, 当直线 $y = x + b$ 与 $\odot Q$ 相切时, 设切点为 G , 与 x 轴交点为

H , 则 QG 与直线 $y = x + b$ 垂直时, $\angle GHQ = 45^\circ$.

由 $QG = 1$, 可得 $QH = \sqrt{2}$.

$$\therefore H(1 - \sqrt{2}, 0).$$

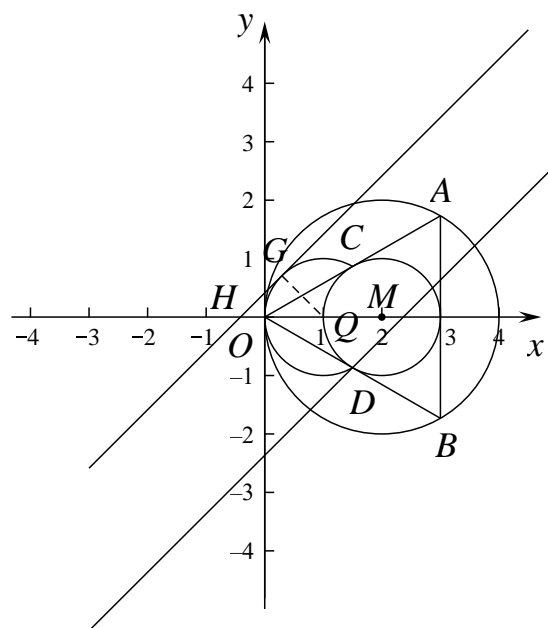
当直线 $y = x + b$ 过 $H(1 - \sqrt{2}, 0)$ 时,

代入 $y = x + b$ 中, 可得 $b = \sqrt{2} - 1$.

当直线 $y = x + b$ 过点 $D(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 时,

$$\text{代入 } y = x + b \text{ 中, 可得 } b = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}.$$

\therefore 直线 $y = x + b$ 上存在“相关切点”,



$\therefore b$ 的取值范围是 $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \leq b \leq \sqrt{2} - 1$.

(2) $2 \leq m \leq 1 + \sqrt{7}$ 或 $1 - \sqrt{7} \leq m \leq 0$.