

数 学

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

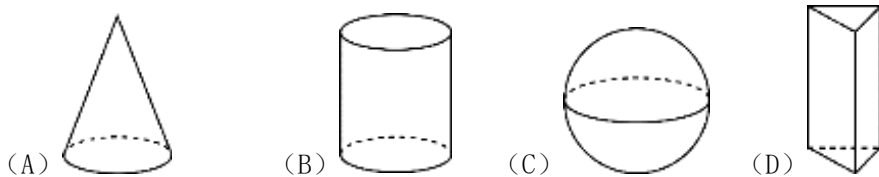
第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 据国家能源局消息，截至 2023 年 12 月 31 日，国家能源集团 2023 年度发电量首次突破 1.2 万亿千瓦时，其中

1 200 000 000 000 用科学记数法表示为()

- A. 1.2×10^{10} B. 1.2×10^{11} C. 1.2×10^{12} D. 1.2×10^{13}

2. 下列几何体中，主视图为三角形的是

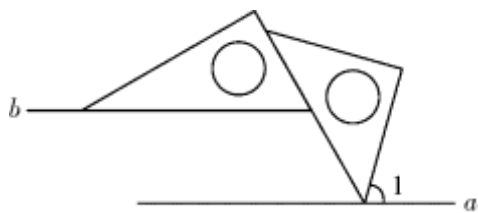


3. 一副三角板如图所示摆放，直线 $a \parallel b$ ，则 $\angle 1$ 的度数是

- A. 60° B. 65° C. 75° D. 80°

4. 若 $a < b < 0$ ，则下列结论不正确的是

- A. $-a > b$ B. $a > -b$
C. $-a > -b$ D. $|a| > |b|$



5. 如果正多边形的每个外角都等于 60° ，则它的边数为()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

6. 布袋中有三个除颜色外其余均相同的小球，小球颜色两红一白，从中随机同时抽取两个小球，则抽到的两个小球颜色恰好相同的概率是()

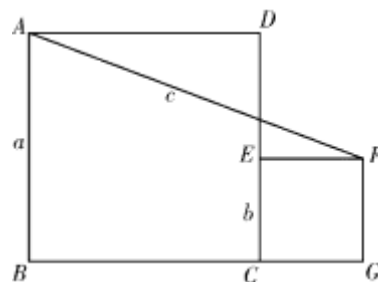
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{5}{9}$

7. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - k = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围为

- A. $k \geq 1$ B. $k > -1$ C. $k \leq 1$ D. $k \geq -1$

8. 如图，正方形 ABCD 中，点 E 为 CD 边上的点(点 E 不与点 C、D 重合)，以 CE 为边作正方形 CEFG，连接 AF，设 $AB=a$ ， $CE=b$ ， $AF=c$ ，给出下面三个结论：① $\sqrt{a^2 + b^2} < c$ ；② $2a > c$ ；③ $2(a^2 + b^2) = c^2$ ；

- A. ①② B. ①③
C. ②③ D. ①②③



上述结论中，所有正确结论的序号是()

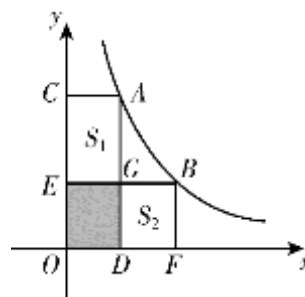
二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{x}{x-2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

10. 分解因式: $mx^2 - 9m =$ _____.

11. 方程 $\frac{7}{x+13} = \frac{1}{2x}$ 的解为_____

12. 如图，点 A、B 分别是反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象上两点，分别过点 A、B



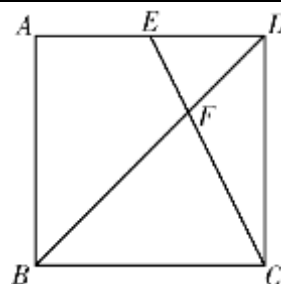
向坐标轴作垂线，四边形 ACEG 的面积记作 S_1 ，四边形 BFDG 的面积记作 S_2 ，则 S_1 _____ S_2 (填 >、< 或 =).

13. 某中学共有 1000 名学生，为了解这 1000 名学生参加志愿者服务的时长情况，从中随机抽取了 100 名学生进行访问，获得了他们的志愿者服务时长（单位：小时），数据整理如下：

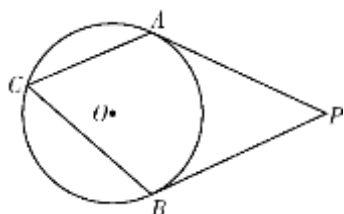
志愿者服务时长	$x < 100$	$100 \leq x < 200$	$200 \leq x < 300$	$300 \leq x < 400$	$400 \leq x < 500$	$x \geq 500$
学生人数	10	20	23	20	15	12

根据以上数据，估计这 1000 名学生的志愿者服务时长不小于 300 小时的学生的人数为_____名.

14. 如图，正方形 ABCD 的边长为 3，点 E 为 AD 边的中点，连接 BD、CE，BD 与 CE 相交于点 F，则 DF 的长为_____.



如图，PA、PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A、B 两点，C 是优弧 AB 上的一个动点，若 $\angle P = 50^\circ$ ，则 $\angle ACB =$ _____°.



16. 某校航模小组的同学正在为即将开始的航模比赛做最后的准备. 已知准备工作共有 A, B, C, D, E, F, G, H, M, N 十项工序，准备工作完成过程需要满足以下要求：

- (1) H 只能在 A、B、C 工序均完成后才能完成；
- (2) M 只能在 C、D、E 工序均完成后才能完成；
- (3) 其余每项工序相互独立，之间没有干扰；
- (4) 一项工序只能由一名学生完成，此工序完成后该学生才能进行其他工序.

各项工序所需时间如下表所示：

工序	A	B	C	D	E	F	G	H	M	N
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

所需时间/分钟	18	15	16	6	7	5	8	3	2	3
---------	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---

在不考虑其他因素的前提下，若由若干名学生合作完成准备工作，则至少需要_____分钟才能全部完成；
若要在最短的时间内合作完成准备工作，则最少需要_____名学生共同参与。

三、解答题（共 68 分，第 17—19 题，每题 5 分，第 20 题 6 分，第 21 题 5 分，第 22—23 题，每题 6 分，第 24—25 题，每题 5 分，第 26 题 6 分；第 27—28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 计算：

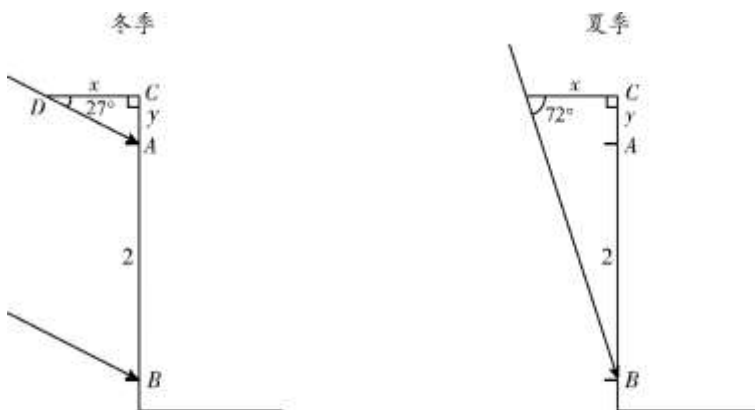
$$2\cos 30^{\circ} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + |\sqrt{3} - 2| - \sqrt{27}$$

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 5x \\ x > \frac{x - 2}{2} \end{cases} .$$

19. 已知 $x = y + 4$ ，求代数式 $\frac{2x - 2y}{x^2 - 2xy + y^2}$ 的值。

20. 如图，线段 AB 表示 2 米高的一扇窗户，要在窗户上方 C 点的位置安装一项遮阳蓬，若已知北京地区冬季太阳光线与水平线夹角的最小值为 27° ，夏季太阳光线与水平线夹角的最大值为 72° ，要让冬季太阳光线与水平线夹角的最小温暖阳光完全照进房间，又能使夏季太阳光线与水平线夹角的最大的时候遮阳蓬能完全遮挡炎热的阳光，设遮阳蓬的长度 CD 为 x 米，遮阳蓬的落空高度 AC 为 y 米，请你根据设计方案计算 x 与 y 的值约为多少。

($\sin 27^{\circ} \approx 0.5$, $\cos 27^{\circ} \approx 0.9$, $\tan 27^{\circ} \approx 0.5$, $\sin 72^{\circ} \approx 1.0$, $\cos 72^{\circ} \approx 0.3$, $\tan 72^{\circ} \approx 3.0$)



21. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 1)$ 和 $(0, -1)$ 。

(1) 求这个一次函数的解析式；

(2) 当 $x < 1$ 时，对于 x 的每一个值，一次函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的值大于函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的值，直接写出 m 的取值范围。

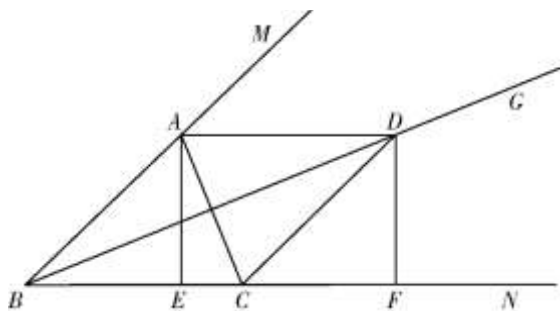
22. 如图，BD 平分 $\angle ABF$ ，点 A 是射线 BM 上一点，过点 A 作 $AD \parallel BN$ 交 BG 于点 D，过 A 作 AE

$\perp BN$ ，过点 D 作 $DF \perp BN$ 。

(1) 求证：四边形 $AEFD$ 是矩形；

(2) 在 BF 上取点 C 使得 $CF=BE$ ，连接 AC 、 CD 。

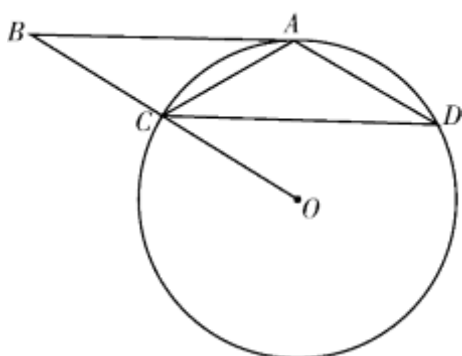
求证： $AC \perp BD$ 。



23. 如图，点 A 、 C 是 $\odot O$ 上两点，过点 A 作 $\odot O$ 的切线与 OC 的延长线交于点 B ，过点 C 作 AB 的平行线与 $\odot O$ 交于点 D ，连接 AD 、 AC 。

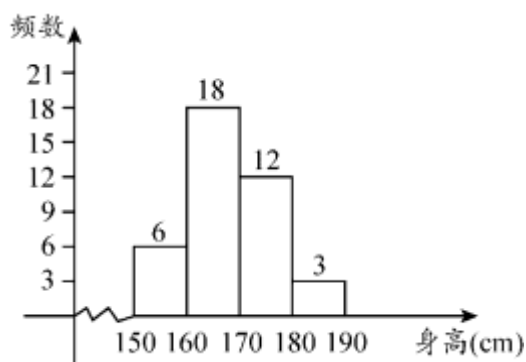
(1) 求证： $\angle D = \angle BAC$ ；

(2) 若 $CD = 8$ ， $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$ ，求 BC 的长。



24. 为了了解本年级的学生的身高情况，数学小组的同学从校医务室随机调取了一个班 39 人的身高数据，（单位：cm），以下是甲、乙、丙三个小组对数据整理的结果：

甲：39 名学生的身高频数分布图（数据分成 4 组： $150 < x \leq 160$ ， $160 < x \leq 170$ ， $170 < x \leq 180$ ， $180 < x \leq 190$ ）：

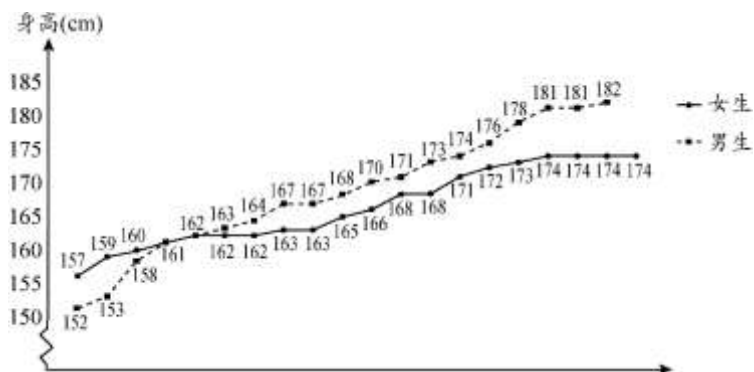


其中，身高的数值在 $160 < x \leq 170$ 这一组的是：

161, 161, 162, 162, 162, 163, 163, 163, 163,

164, 165, 166, 167, 167, 168, 168, 168, 170.

乙：该班有 20 名女生和 19 名男生，女生和男生的身高数据的折线图：



丙：39 名学生的身高的平均数、中位数、众数：

平均数	中位数	众数
167	m	n

(1) 写出表中 m 和 n 的值；

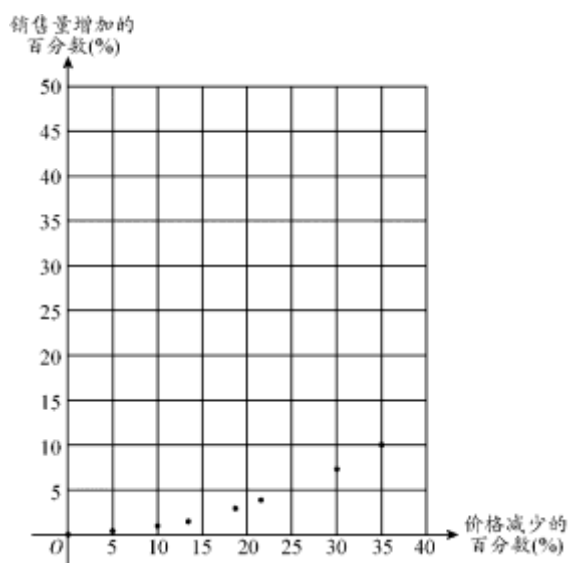
(2) 在男女两组学生中，身高数据更均匀的是___（填“男生”或“女生”）；

(3) 现需要从该班男、女生中各抽调 6 名学生参加该校运动会开幕式仪仗队，已知抽调的女生身高分别为 166，168，168，171，172，173. 男生已经确定的四名成员的身高数据为 168，170，171，173，为了使被抽调的男生身高比女生身高的平均值略大，且仪仗队身高整体比较均匀，则选出的另外两名男生的身高分别为____和__.

25. 商品的价格会影响消费者的购买的欲望，设商品价格减少 $x\%$ ，A 商品的销售量上升 $y_1\%$ ，B 商品的销售量上升 $y_2\%$ ，以下是某商场销售部统计的 A、B 两种商品随着价格的变化销售量变化的百分比数据：

x (%)	0	5	10	13	18	22	30	35
y_1 (%)	0	2.0	4.6	6.0	7.9	12.1	32.1	47.2
y_2 (%)	0	1	1.5	2.0	3.0	4.2	7.2	10.0

(1) 通过分析表格中的数据，发现 y_1 ， y_2 都可近似看作 x 的函数，在平面直角坐标系 xOy 中，已经描出表中各组数值所对应的点，补全其余各点，并用平滑曲线连接这些点；



(2) 据悉对于百姓生活的必需品往往随着价格的涨幅变化不大，但奢侈品会因价格的涨幅呈现明显的变

化, 若 A、B 中恰好有一件商品是奢侈品另一件商品为必需品, 观察图中的两条曲线的变化情况推测 A、B 两件商品中是必需品的是_____;(填 A 或 B)

(3) 结合函数图象, 若商场在母亲节那天对 A 商品八折促销, 若要使 B 商品的销售增加百分数与 A 商品接近相同, 则 B 商品打几折?(打几折就是按照商品价格的百分之几十销售)

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ 上任意两点.

(1) 求抛物线的对称轴 (用含 m 的式子表示);

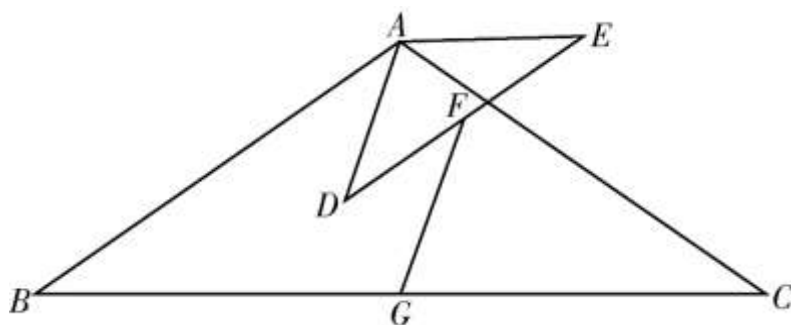
(2) 若 $x_2 = x_1 + n (n > 0)$, 点 M、N 中至少有一个点位于 x 轴的上方, 直接写出 n 的范围;

(3) 若对于 $-1 < x_1 < 2$, $x_2 = m + 2$ 时, 都有 $y_1 < y_2$, 求 m 的取值范围.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \alpha^\circ$, $AB = AC$, 点 D 为平面上一点, 连接 AD , 将 AD 绕着点 A 逆时针旋转 α° 得到线段 AE , 连接 DE , 取 DE 的中点 F , 取 BC 的中点 G , 连接 DC , 取 DC 的中点 M , 连接 FM .

(1) 依题意补全图形;

(2) 猜想 $\angle GFM$ 的度数 (用含 α 的式子表示), 并证明.



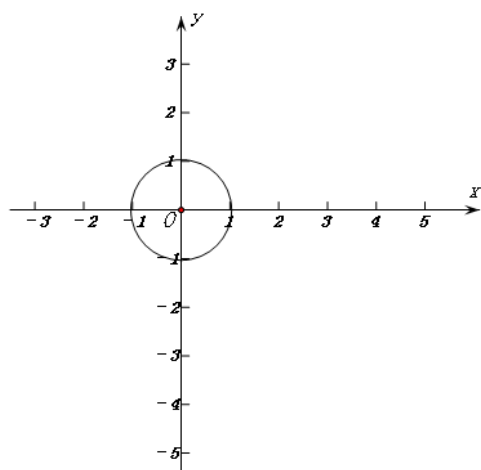
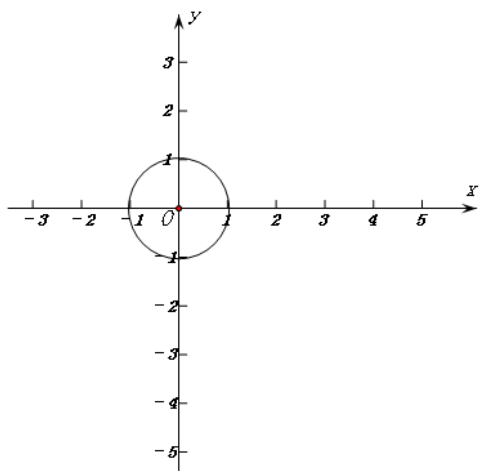
28. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知线段 AB , P 为线段 AB 上一点 (不与点 A、B 重合), 以 A 为圆心, AP 长为半径画 $\odot A$, 以 B 为顶点作 $\angle MBN$, $\angle MBN = \beta^\circ$, 若角 $\angle MBN$ 的两边一边与 $\odot A$ 相切, 另一边与 $\odot A$ 相交, 则称线段 AB 与 $\odot A$ 关于点 P — β 关联.

(1) 若点 P 为线段 AB 的中点, 线段 AB 与 $\odot A$ 关于点 P — β 关联, 则满足条件的 β 值可以是_____ ① 30°

② 45° ③ 60° ④ 90°

(2) $\odot O$ 半径为 1, P 是 $\odot O$ 上一点, $B(0, m)$ 是 y 轴上一点, 线段 OB 与 $\odot O$ 关于点 P — 90 关联, 直接写出 m 的取值范围;

(3) $\odot O$ 半径为 1, 点 A 是 $\odot O$ 上一点, 点 $B(5, 0)$, 线段 AB 与 $\odot A$ 关于点 P — 60 关联, 若在直线 $y = x + b$ 上存在满足条件的点 P , 直接写出 b 的取值范围.



参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	B	B	A	D	D

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$x \neq 2$	$m(x+3)(x-3)$	$x=1$	=	470	$\sqrt{2}$	65°	21;4

三、解答题（共 68 分，第 17—19 题，每题 5 分，第 20 题 6 分，第 21 题 5 分，第 22—23 题，每题 6 分，第 24—25 题，每题 5 分，第 26 题 6 分；第 27—28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.解: $2\cos 30^\circ + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + |\sqrt{3}-2| - \sqrt{27}$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 2 - \sqrt{3} - 3\sqrt{3} \dots\dots\dots 4$$

$$= 5 - 3\sqrt{3} \dots\dots\dots 5$$

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x+3 \geq 5x \\ x > \frac{x-2}{2} \end{cases}$$

解①得 $x \leq 1 \dots\dots\dots 2$

解②得 $x > -2 \dots\dots\dots 4$

$\therefore -2 < x \leq 1 \dots\dots\dots 5$

19.先化简，再求值:

$$\frac{2x-2y}{x^2-2xy+y^2}$$

$$= \frac{2(x-y)}{(x-y)^2} \dots\dots\dots 2$$

$$= \frac{2}{x-y} \dots\dots\dots 3$$

$\because x = y + 4, \therefore x-y=4 \dots\dots\dots 4$

$\therefore$ 原式 $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 5$

20. 解: 由图1可知, $\tan 27^\circ = \frac{y}{x} \approx \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2$

∴ AC ⊥ BD 6

23. (1) 证明: 连接 OA 交 CD 于 E

∵ AB 是 ⊙O 的切线

∴ ∠BAO = 90° 1

∵ AB // CD

∴ ∠CEO = 90° 2

∴ CE = DE

∴ AC = AD

∴ ∠ACD = ∠D

∵ AB // CD

∴ ∠BAC = ∠ACD

∴ ∠BAC = ∠D 3

(2) ∵ OA ⊥ CD, CD = 8

∴ CE = DE = 4

∵ $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$

∴ $\tan \angle D = \frac{1}{2}$

∴ AE = 2 4

设半径为 x

则 OC = x, OE = x - 2

由勾股定理得:

$\angle ACB = 45^\circ$, $x^2 - (x - 2)^2 = 4^2$

解得 x = 5 5

∴ OC = 5, OE = 3

∵ CD // AB

∴ $\frac{5}{BC} = \frac{3}{2}$

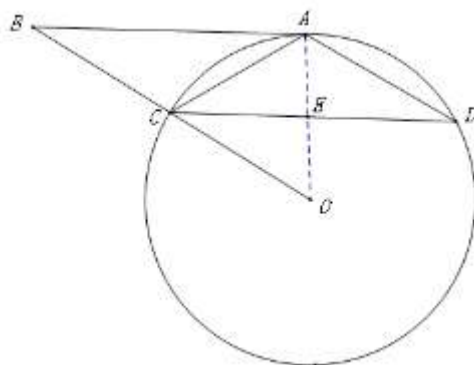
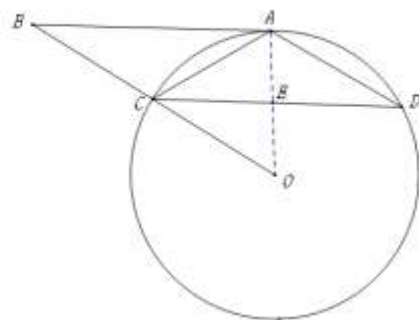
解得 $BC = \frac{10}{3}$ 6

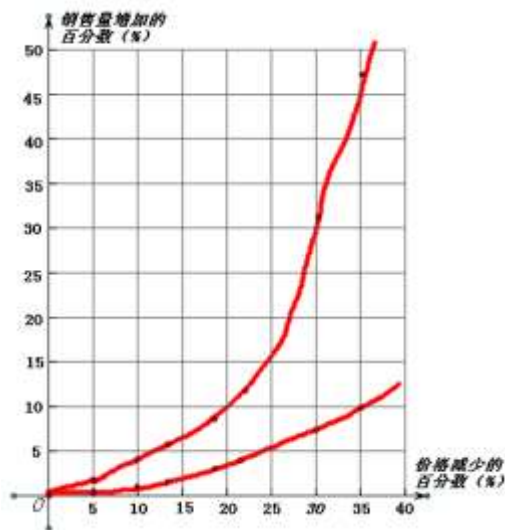
24. (1) m = 167, n = 174 2

(2) 女生 3

(3) 167, 174 5

24. 解 (1) 补全函数图象 2





(2) B3

(3) 由图象可知 A 商品八折时，即 $x=20$ 时 y_1 的值约为 10，而当 y_2 的值约为 10 时， x_2 值约为 35，所以 B 商品打六五折.5

26. (1) 抛物线的对称轴为 $x=m$ 1

(2)

$$\because y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$$

$$= (x - m)^2 - 1$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(m, -1)$

令 $y=0$

得到 $x=m-1$ 或 $x=m+1$

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的两个交点为 A $(m-1, 0)$ B $(m+1, 0)$

$$AB=2$$

$\therefore$ 若点 M、N 中至少有一个点位于 x 轴的上方

只需 $n > 2$ 3

(3) $\because$ 抛物线的对称轴为 $x=m$,

$\therefore (m+2, y_2)$ 点一定位于对称轴的右侧3

它的对称点为 $(m-2, y_2)$

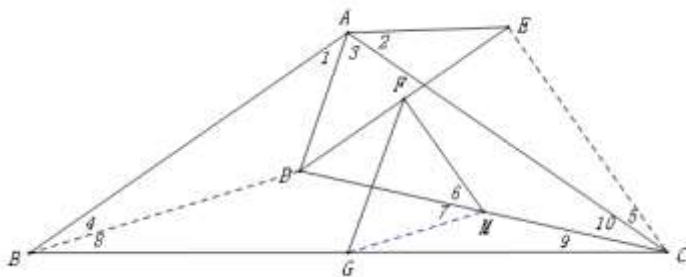
$\because$ 对于 $-1 < x_1 < 2$, 都有 $y_1 < y_2$,

在抛物线对称轴左侧 y 随 x 增大而减小, 在抛物线对称轴右侧 y 随 x 增大而增大

$$\therefore m - 2 \leq -1 < x_1 < 2 \leq m + 2$$

解得 $0 \leq m \leq 1$.

27.(1)补全图形.....1



(2) $\angle GFM = \frac{1}{2}\alpha$ 2

证明：方法一：

连接 BD, EC, GM. 3

$$\because AB=AC, AD=AE, \angle BAC = \angle DAE = \alpha^\circ$$

$$\therefore \angle BAC - \angle 3 = \angle DAE - \angle 3$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ 4}$$

$$\therefore BD=CE, \angle 4 = \angle 5$$

$\because$ 点 F 为 BE 中点, M 为 DC 中点

$$\therefore FM \parallel EC, FM = \frac{1}{2}EC$$

$\because$ 点 G 为 BC 中点, M 为 DC 中点

$$\therefore GM \parallel BD, GM = \frac{1}{2}BD \text{ 5}$$

$$\therefore BD=CE$$

$$\therefore FM=GM$$

$$\because FM \parallel EC$$

$$\therefore \angle 6 = \angle DCE = \angle 5 + \angle 10$$

$$\because GM \parallel BD$$

$$\therefore \angle 7 = 180^\circ - \angle BDC = \angle 8 + \angle 9$$

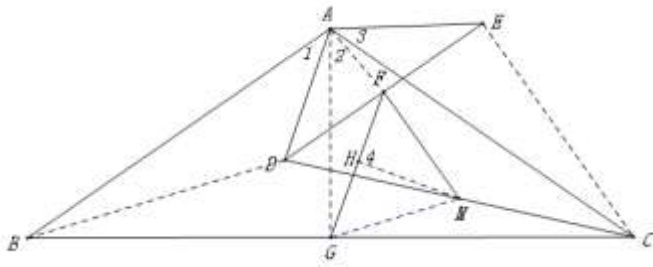
$$\therefore \angle 6 + \angle 7 = \angle 5 + \angle 10 + \angle 8 + \angle 9$$

$$= \angle 4 + \angle 10 + \angle 8 + \angle 9$$

$$= 180^\circ - \alpha^\circ \text{ 6}$$

$$\therefore \angle GFM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle FMG) = \frac{1}{2}\alpha \text{ 7}$$

方法二：



证明：连接 AF、BD、AG、GM.....3

过 M 作 $MH \perp FG$ 于点 H

$\triangle ADE$ 中， $\angle DAE = \alpha^\circ$ ， $AD = AE$ ，F 为 DE 中点

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ, \quad \angle DAF = \frac{1}{2}\alpha$$

$\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = \alpha^\circ$ ， $AB = AC$ ，G 为 BC 中点

$$\therefore \angle AGB = 90^\circ, \quad \angle BAG = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle ADF \dots\dots\dots 4$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle AGF$$

$$\therefore \frac{GF}{BD} = \frac{AG}{AB}$$

$$\because AB = AC, \quad AD = AE, \quad \angle BAC = \angle DAE = \alpha^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \dots\dots\dots 5$$

$$\therefore BD = CE$$

$\because$ 点 F 为 BE 中点，M 为 DC 中点

$$\therefore FM = \frac{1}{2}EC$$

$\because$ 点 G 为 BC 中点，M 为 DC 中点

$$\therefore GM = \frac{1}{2}BD \dots\dots\dots 6$$

$$\therefore BD = CE$$

$$\therefore FM = GM$$

$$\therefore MH \perp FG$$

$$\therefore \angle 4 = 90^\circ$$

$\therefore FH = \frac{1}{2}FG$	
$\because GM = \frac{1}{2}BD$	
$\therefore MF = \frac{1}{2}BD$	
$\therefore \frac{FH}{MF} = \frac{FG}{BD} = \frac{AG}{AB}$	
$\therefore \cos \angle GFM = \cos \angle BAG$	
$\therefore \angle GFM = \angle BAG = \frac{1}{2}\alpha$	
.....	7
28. 解: (1) ①②;	2
(2) $1 < m < \sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2} < m < -1$;	4
(3) $-5 < b < \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{5}{2}$	7