

高三数学试卷

2025. 1

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 集合 $A = \{x | 0 < x < 1\}$, 则 $\complement_U A =$

- (A) $[-2, 0]$ (B) $[-2, 0) \cup (1, 2]$
(C) $[1, 2]$ (D) $[-2, 0] \cup [1, 2]$

(2) 在复平面内, 复数 $i(1+i)$ 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$. 若其焦点到准线的距离为 4, 则抛物线 C 的焦点坐标为

- (A) $(-2, 0)$ (B) $(1, 0)$
(C) $(2, 0)$ (D) $(4, 0)$

(4) 函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象的一个对称中心是

- (A) $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ (B) $(-\frac{\pi}{6}, 0)$
(C) $(\frac{\pi}{12}, 0)$ (D) $(\frac{\pi}{6}, 0)$

(5) “ $m > n > 1$ ”是“ $\log_m n < 1$ ”的

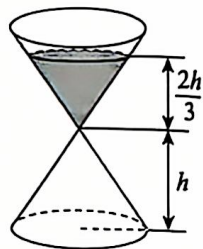
- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(6) 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 9$, 过点 $M(1, 2)$ 的直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点. 当 $|AB|$ 取最小值时, 直线 l 的方程为

- (A) $x = 1$ (B) $x - 2y = 0$
(C) $x + 2y - 5 = 0$ (D) $x + 2y - 3 = 0$

- (7) 沙漏是一种古代计时仪器. 如图, 某沙漏由上下两个相同圆锥组成, 圆锥的底面直径和高均为 6 cm, 细沙全部在上部时, 其高度为圆锥高度的 $\frac{2}{3}$, 则这些细沙的体积为

- (A) $\frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$
 (B) $\frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$
 (C) $8\pi \text{ cm}^3$
 (D) $\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$



- (8) 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 - m, & x \leq 0, \\ (x-1)\ln x, & x > 0 \end{cases}$ 恰有两个零点, 则实数 m 的取值范围是

- (A) $(-2, -1)$ (B) $(0, 1)$
 (C) $(1, 2)$ (D) $(1, 2]$

- (9) “三分损益法”是古代中国发明制定音律时所用的方法, 现有一古琴是以一根确定长度的琴弦为基准, 第二根琴弦的长度是第一根琴弦长度的 $\frac{2}{3}$, 第三根琴弦的长度是第二根琴弦长度的 $\frac{4}{3}$, 第四根琴弦的长度是第三根琴弦长度的 $\frac{2}{3}$, 第五根琴弦的长度是第四根琴弦长度的 $\frac{4}{3}$. 琴弦越短, 发出的声音音调越高, 这五根琴弦发出的声音按音调由低到高分别称为“宫、商、角、徵、羽”, 则“宫”与“角”所对琴弦长度之比为

- (A) $\frac{16}{27}$ (B) $\frac{3}{2}$
 (C) $\frac{9}{8}$ (D) $\frac{81}{64}$

- (10) 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列, 若存在正整数 k 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 均有 $a_{n+k} < a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是间隔递减数列, 其中 k 称为数列 $\{a_n\}$ 的间隔数. 给出下列三个结论:

- ① 若 $a_n = \frac{9}{n}$, 则 $\{a_n\}$ 是间隔递减数列;
 ② 若 $a_n = n(-2)^{n+1}$, 则 $\{a_n\}$ 是间隔递减数列;
 ③ 若 $a_n = -\frac{n}{2} + \sin n$, 则 $\{a_n\}$ 是间隔递减数列且 $\{a_n\}$ 的间隔数的最小值是 4,

其中所有正确结论的序号是

- (A) ① (B) ①③ (C) ②③ (D) ①②③

第二部分(非选择题 共110分)

二、填空题共5小题,每小题5分,共25分。

(11)在 $(2-x)^4$ 的展开式中, x 的系数为_____。(用数字作答)

(12)双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是_____;设 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点,点 P 在双曲线 C 上,且 $|PF_1| = 3$,则 $|PF_2| =$ _____.

(13)使不等式 $\cos\theta > \sin\theta > \tan\theta$ 成立的一个 θ 的值是_____.

(14)已知 O 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点,满足 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$,且 $|\vec{OA}| = 2, |\vec{OB}| = 3, |\vec{OC}| = 4$,设 θ 为向量 $\vec{OA}, \vec{OB}$ 的夹角,则 $\cos\theta =$ _____; $\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} =$ _____.

(15)在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E 在线段 AC_1 上(不与 A, C_1 重合),

$EF \perp AC$ 于 $F, FG \perp BC$ 于 G ,以下四个结论:

① $BC \perp$ 平面 EFG ;

②线段 EF 与线段 FG 的长度之和为定值;

③ $\triangle EFG$ 面积的最大值为 $\frac{1}{4}$;

④线段 EG 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

其中所有正确的结论的序号是_____.

三、解答题共6小题,共85分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题13分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a\sin 2C = c\sin A$.

(I)求 $\angle C$;

(II)若 $c = \sqrt{7}$,再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知,使 $\triangle ABC$ 存在,求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a+b=4$;条件②: $\sin B - \sin A = \sqrt{3}$;条件③: $\cos A = \frac{5\sqrt{7}}{14}$

注:如果选择的条件不符合要求,第(II)问得0分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

(17)(本小题 14 分)

随着科技的飞速发展,人工智能已经逐渐融入我们的日常生活. 在教育领域, AI 的赋能潜力巨大. 为了解教师对 AI 大模型使用情况, 现从某地区随机抽取了 200 名教师, 对使用 A、B、C、D 四种 AI 大模型的情况统计如下:

使用 AI 大模型的种数 性别	0	1	2	3	4
男	4	27	23	16	10
女	6	48	27	24	15

在上述样本所有使用 3 种 AI 大模型的 40 人中, 统计使用 A、B、C、D 的 AI 大模型人次如下:

AI 大模型种类	A	B	C	D
人次	32	30	30	28

用频率估计概率.

- (I) 从该地区教师中随机选取一人, 估计至少使用两种 AI 大模型 (A、B、C、D 中) 的概率;
- (II) 从该地区使用 3 种 AI 大模型 (A、B、C、D 中) 的教师中, 随机选出 3 人, 记使用 B 的有 X 人, 求 X 的分布列及其数学期望 EX ;
- (III) 从该地区男、女教师中各随机选一人, 记他们使用 AI 大模型 (A、B、C、D 中) 的种数分别为 Y, Z , 比较 Y, Z 的数学期望 EY, EZ 的大小. (结论不要求证明)

(18)(本小题 15 分)

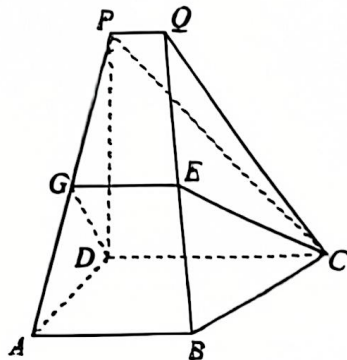
如图,在五面体 $ABCDPQ$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AB \parallel CD$, $PQ \parallel CD$, $AD = CD = DP = 4$, $AB = 3$. E, G 分别为 BQ, AP 的中点, 连接 DG, EG, CE .

(I) 求证: $AP \perp$ 平面 DCE ;

(II) 求直线 CP 与平面 DCE 所成角的正弦值;

(III) 线段 BC 上是否存在点 M , 使得 $CP \parallel$ 平面 DGM ? 若存

在, 求 $\frac{BM}{BC}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



(19)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^n}{e^{\frac{1}{x}-1}}$ ($x > 0$), 其中 n 是常数, $n \in \mathbb{Z}$.

(I) 当 $n = 0$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求 $f(x)$ 的极值.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 右顶点为 $(2, 0)$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过原点 O 且与 y 轴不重合的直线 l 与椭圆 E 交于 M, N 两点. 已知点 $P(0, 2)$, 直线 PM, PN 与椭圆 E 的另一个交点分别为 A, B . 证明: 直线 AB 过定点.

(21)(本小题 15 分)

已知无穷数列 $\{a_n\}$, 给定正整数 m , 若数列 $\{a_n\}$ 满足以下两个性质, 则称 $\{a_n\}$ 为 P_m 数列:

$$\textcircled{1} a_1 \in \mathbf{N}^*; \quad \textcircled{2} a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m, & a_n < 2^m, \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \geq 2^m. \end{cases}$$

(I) 已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别为 P_2 数列和 P_3 数列, 且 $a_1 = 8, b_1 = 10$, 求 a_4 和 b_4 ;

(II) 已知正整数数列 $\{a_n\}$ 是 P_m 数列.

(i) 无穷数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{a_n}{2^{d_n}}$ 且 c_n 为奇数, 其中 $d_n \in \mathbf{N}$, 证明: 对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,

$$c_n < 2^m;$$

(ii) 求满足条件的 m , 并写出与 m 对应的 a_1 所有可能取值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)