

高一数学试卷

2025.1

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题 50 分和非选择题 100 分

第一部分(选择题 共 50 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 3\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $(-\infty, 3)$ (B) $(1, +\infty)$ (C) $(0, 3)$ (D) $(1, 3)$

(2) 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 3 > 0$, 则命题 p 的否定是

- (A) $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$ (B) $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 3 > 0$
(C) $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 3 \leq 0$ (D) $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x + 3 > 0$

(3) $(\frac{1}{2})^{-2} + \log_2 4 =$

- (A) $\frac{9}{4}$ (B) 4 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 6

(4) 下列函数中,在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是

- (A) $y = (x - 1)^2$ (B) $y = -\ln x$ (C) $y = 2^x$ (D) $y = \cos x$

(5) 在平面直角坐标系 xOy 中,角 α 以 Ox 为始边,终边经过点 $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则 $\sin \alpha =$

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6) 已知 $a = 3^{0.1}$, $b = 2^3$, $c = \log_3 0.2$, 则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$

(7) 设函数 $f(x) = x^2 + (a - 2)x + 1$ ($a \in \mathbf{R}$), 则“ $a = 2$ ”是“ $f(x)$ 是偶函数”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 在平面直角坐标系 xOy 中,角 α 与角 β 均以 Ox 为始边,它们的终边关于 x 轴对称. 若

$\beta \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$, 则 $\cos \alpha$ 的最大值为

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

- (9) 新闻推送涉及到信息检索, 若一个关键词 w 在 D_w 个网页中出现过, 则 D_w 越大, w 的权重越小; 反之亦然. 在信息检索中, 使用最多的权重是“逆文本频率指数 I_w ”, $I_w = \lg\left(\frac{D}{D_w}\right)$, 其中 D 是全部网页数, $D > 0, D_w > 0$. 如果关键词 a 的逆文本频率指数 I_a 比关键词 b 的逆文本频率指数 I_b 大 2, 那么

- (A) $D_b = 2D_a$ (B) $D_b = 10D_a$ (C) $D_b = 20D_a$ (D) $D_b = 100D_a$

- (10) 已知不等式 $(x-m)(x^2-nx-2) \geq 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 则 $m^2 + n^2$ 的最小值为

- (A) $4\sqrt{2} - 4$ (B) 4 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2} + 2$

第二部分(非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

- (11) 函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的定义域是_____.

- (12) 已知函数 $f(x) = 2\tan x$, 则 $f(x)$ 的最小正周期是_____.

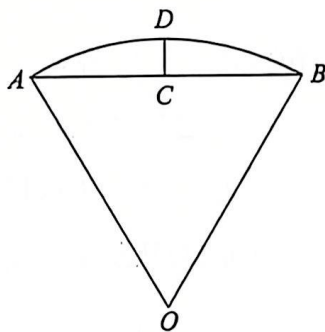
- (13) 已知幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象经过点 $(9, \sqrt{3})$, 则 $\alpha =$ _____.

- (14) 已知 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$, 写出满足 $\sin \alpha = \cos \beta$ 的一组 α, β 的值为 $\alpha =$ ____, $\beta =$ _____.

- (15) 我国古代数学著作《九章算术》中给出求弧田(弓形田)面积的“弧田术”, 如图, $\widehat{AB}$ 是以

O 为圆心、 OA 为半径的圆弧, C 是线段 AB 的中点, D 在 $\widehat{AB}$ 上, $CD \perp AB$. 设弧田 ABD 的面积为 S , “弧田术”给出 S 的近似值 s 的计算公式为 $s = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + CD^2)$. 若 $OA = 2$,

$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 则 $S =$ _____; $s =$ _____.



- (16) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq a, \\ 2^x + a, & x < a. \end{cases}$ 给出下面四个结论:

- ①当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点;
 ②对任意 $a > 3$, $f(x)$ 既没有最大值, 也没有最小值;
 ③存在实数 a , $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;
 ④若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的最小值为 -1 .

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 5 小题,共 70 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(17)(本小题 13 分)

已知集合 $A = \{x | x^2 + 4x - 5 > 0\}$, $B = \{x | (x - a)(x - 1) \leq 0\}$.

(I) 当 $a = 3$ 时,求集合 $A \cap B$ 及 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B$;

(II) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

(18)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

(I) 求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(19)(本小题 14 分)

已知 $\sin \theta, \cos \theta$ 是方程 $2x^2 + \sqrt{2}x + m = 0$ 的两个实数根.

(I) 求实数 m 的值;

(II) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知,求 $\cos(2\theta - \frac{\pi}{4})$ 的值.

条件①: $\sin \theta > 0$;

条件②: $\tan \theta > 0$;

条件③: θ 为第四象限角.

注:如果选择的条件不符合要求,第(II)问得 0 分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 判断 $f(x)$ 的单调性并用定义证明;

(III) 解关于 x 的不等式 $f(4^x) + f(2 - 3 \times 2^x) < 0$.

(21)(本小题 15 分)

对于给定的正整数 n ($n \geq 2$), 设集合 $M = \{k \in \mathbf{Z} \mid -n \leq k \leq n\}$, 集合 A, B 是 M 的非空子集且满足 $A \cup B = M, A \cap B = \emptyset$. 若对于任意 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 y , 使得 $x + y$ 为偶数, 则记 $y = p(x)$, 并称 $p: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的“ P 函数”.

(I) 当 $n = 3$ 时, 若集合 $A = \{-3, -1, 1, 3\}$, 写出集合 B , 并判断从集合 A 到集合 B 是否存在“ P 函数”? 说明理由;

(II) 若集合 A 至少包含一个奇数, 且 $p: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的“ P 函数”, 求证: 存在 $x \in A$, 使得 $p(x) = -x$;

(III) 若 $p: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的“ P 函数”, 且对于任意 $x \in A$, 都有 $p(x) \geq x$, 求满足条件的集合 A 的所有可能.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

高一数学参考答案

2025. 1

一、选择题(共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分)

- (1)D (2)A (3)D (4)C (5)C
 (6)B (7)C (8)B (9)D (10)A

二、填空题(共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

- (11) $(-1, +\infty)$ (12) π (13) $\frac{1}{4}$
 (14) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ (答案不唯一) (15) $S = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}, s = \frac{11}{2} - 3\sqrt{3}$ (16)①②④

三、解答题(共 5 小题,共 70 分)

(17)(共 13 分)

解:(I)因为 $x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$, 所以方程 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 有两个实数根 $-5, 1$.

所以不等式 $x^2 + 4x - 5 > 0$ 的解集为 $\{x | x < -5 \text{ 或 } x > 1\}$.

所以 $A = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

当 $a = 3$ 时, 方程 $(x - 3)(x - 1) = 0$ 有两个实数根 $1, 3$.

所以不等式 $(x - 3)(x - 1) \leq 0$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$.

所以 $B = [1, 3]$.

所以 $A \cap B = (1, 3]$.

又因为 $\complement_{\mathbb{R}} A = [-5, 1]$,

所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = [-5, 3]$ 8 分

(II)若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A \subseteq B$.

由 $A = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$ 得 $\complement_{\mathbb{R}} A = [-5, 1]$.

当 $a = 1$ 时, $B = \{1\}$, 不合题意.

当 $a > 1$ 时, $B = [1, a]$, 不合题意.

当 $a < 1$ 时, $B = [a, 1]$, 由 $[-5, 1] \subseteq B$ 得 $a \leq -5$.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -5]$.

..... 13 分

(18)(共13分)

$$\text{解: (I)} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

$$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right)$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi$ 7分

(II) 函数 $y = \sin t$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{得 } -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ 13分

(19)(共14分)

解: (I) 因为 $\sin \theta, \cos \theta$ 是方程 $2x^2 + \sqrt{2}x + m = 0$ 的两个实数根,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = 2 - 8m \geq 0, \\ \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{m}{2}. \end{cases}$$

$$\text{由 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{2}, \text{ 得 } 1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } m = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \text{ 满足 } \Delta > 0,$$

$$\text{则 } m = -\frac{1}{2}. \text{ 6分}$$

(II) 选条件①:

因为 $\sin \theta > 0, \sin \theta \cos \theta < 0$, 所以 $\cos \theta < 0$.

$$\text{因为 } (\cos \theta - \sin \theta)^2 = 1 - 2\sin \theta \cos \theta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \cos \theta - \sin \theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

所以 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2},$

所以 $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

选条件③:

因为 θ 为第四象限角, 所以 $\sin\theta < 0, \cos\theta > 0.$

因为 $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$

所以 $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

所以 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{2},$

所以 $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\theta \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\theta \sin \frac{\pi}{4}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(20)(共 15 分)

解:(I)由题设知 $f(-x) = -f(x),$

则 $\frac{2^{-x} + a}{2^{-x} + 1} = \frac{1 + a \cdot 2^x}{1 + 2^x} = -\frac{2^x + a}{2^x + 1}$ 恒成立.

所以 $1 + a \cdot 2^x = -2^x - a,$ 即 $(1 + a)(2^x + 1) = 0,$ 则 $a = -1.$

所以 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(Ⅱ) $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 证明如下:

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2^{x_1} - 1}{2^{x_1} + 1} - \frac{2^{x_2} - 1}{2^{x_2} + 1} = \frac{(2^{x_1} - 1)(2^{x_2} + 1) - (2^{x_1} + 1)(2^{x_2} - 1)}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)} \\ &= \frac{2(2^{x_1} - 2^{x_2})}{(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1)}. \end{aligned}$$

由 $x_1 < x_2$, 则 $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$ 且 $(2^{x_1} + 1)(2^{x_2} + 1) > 0$, 故 $f(x_1) < f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 10 分

(Ⅲ) $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

且 $f(4^x) + f(2 - 3 \times 2^x) < 0$,

所以 $f(4^x) < -f(2 - 3 \times 2^x)$.

则 $f(4^x) < f(3 \times 2^x - 2)$.

由(Ⅱ)知, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $2^{2x} < 3 \times 2^x - 2$. 令 $2^x = t > 0$,

则 $t^2 - 3t + 2 < 0$, 解得 $1 < t < 2$.

故 $2^x \in (1, 2)$, 解得 $x \in (0, 1)$.

所以不等式解集为 $(0, 1)$ 15 分

(21)(共 15 分)

解:(Ⅰ) $B = \{-2, 0, 2\}$.

从集合 A 到集合 B 不存在“ P 函数”, 理由如下:

因为集合 A 中的元素均为奇数, 集合 B 中的元素均为偶数,

任取 $x \in A, y \in B$, 则 $x + y$ 为奇数, 不合题意,

所以从集合 A 到集合 B 不存在“ P 函数”. 4 分

(Ⅱ) 假设不存在 $x \in A$ 使得 $p(x) = -x$,

即对于任意 $x \in A$ 都有 $p(x) \neq -x$.

因为 $p(x)$ 是 B 中唯一确定的数, 使得 $x + p(x)$ 为偶数,

所以 $-x \in A$.

设 $a \in A$ 为奇数, 则 $-a \in A, p(a) \in B$ 是奇数.

若 $-p(a) \in B$, 则 $a + p(a)$ 与 $a + [-p(a)]$ 均为偶数, 不合题意,

所以 $-p(a) \in A$.

又因为 $-p(a) \in A$, 所以 $p(a) = -[-p(a)] \in A$, 与 $p(a) \in B$ 矛盾.

所以存在 $x \in A$ 使得 $p(x) = -x$ 9 分

当 n 为奇数时,集合 M 中共有 $n+1$ 个奇数, n 个偶数,
因为对于任意 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 y , 使得 $x+y$ 为偶数,
且都有 $p(x) \geq x$.

根据奇数与奇数的和为偶数, 偶数与偶数的和为偶数,

集合 A 有以下三种不同的情形:

- ① n 个奇数, 0 个偶数;
- ② 0 个奇数, $n-1$ 个偶数;
- ③ n 个奇数, $n-1$ 个偶数;

又因为对于任意 $x \in A$, 都有 $p(x) \geq x$, 集合 A 中元素必然选择奇数或偶数中较小的元素,

即 $n \in B$ 且 $n-1 \in B$.

所以有当 $A = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, -1, 1, 3, \dots, n-2\}$,

$B = \{-n+1, -n+3, -n+5, \dots, 0, 2, 4, \dots, n-1, n\}$ 时,

对于任意 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 $y = n$, 使得 $x+y$ 为偶数,
且 $p(x) \geq x$, 满足题意;

当 $A = \{-n+1, -n+3, -n+5, \dots, 0, 2, \dots, n-3\}$,

$B = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, -1, 1, 3, \dots, n-2, n-1, n\}$ 时,

对于任意 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 $y = n-1$, 使得 $x+y$ 为偶数,
且 $p(x) \geq x$, 满足题意;

当 $A = \{-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-4, n-3, n-2\}$,

$B = \{n-1, n\}$ 时,

对于任意奇数 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的 $y = n$, 使得 $x+y$ 为偶数,
且 $p(x) \geq x$.

对于任意偶数 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的 $y = n-1$, 使得 $x+y$ 为偶数,
且 $p(x) \geq x$, 均满足题意;

同理, 当 n 为偶数时, 集合 M 中共有 n 个奇数, $n+1$ 个偶数,

集合 A 有以下三种不同的情形:

- ① $n-1$ 个奇数, 0 个偶数;
- ② 0 个奇数, n 个偶数;
- ③ $n-1$ 个奇数, n 个偶数;

当 $A = \{-n+1, -n+3, -n+5, \dots, -1, 1, 3, \dots, n-3\}$,

$B = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, -2, 0, 2, \dots, n-2, n-1, n\}$ 时,

对于任意 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 $y = n-1$, 使得 $x+y$ 为偶数,

且 $p(x) \geq x$, 满足题意;

当 $A = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, -2, 0, 2, \dots, n-4, n-2\}$,

$B = \{-n+1, -n+3, -n+5, \dots, -1, 1, \dots, n-3, n-1, n\}$ 时,

对于任意 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 $y = n$, 使得 $x+y$ 为偶数,

且 $p(x) \geq x$, 满足题意;

当 $A = \{-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-4, n-3, n-2\}$,

$B = \{n-1, n\}$ 时,

对于任意奇数 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 $y = n-1$, 使得 $x+y$ 为偶数,

且 $p(x) \geq x$,

对于任意偶数 $x \in A$, 在集合 B 中有唯一确定的数 $y = n$, 使得 $x+y$ 为偶数,

且 $p(x) \geq x$, 均满足题意;

综上, 当 n 为奇数时,

$A = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, -1, 1, 3, \dots, n-2\}$,

$A = \{-n+1, -n+3, -n+5, \dots, 0, 2, \dots, n-3\}$

$A = \{-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-4, n-3, n-2\}$.

当 n 为偶数时, $A = \{-n+1, -n+3, -n+5, \dots, -1, 1, 3, \dots, n-3\}$,

$A = \{-n, -n+2, -n+4, \dots, -2, 0, 2, \dots, n-4, n-2\}$,

$A = \{-n, -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-4, n-3, n-2\}$ 15 分