

2025 北京昌平初三（上）期末

数 学

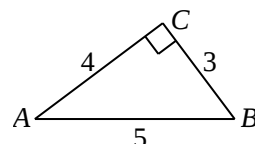
2025. 1

本试卷共 8 页，三道大题，28 个小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请交回答题卡。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

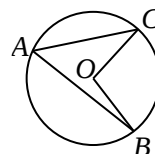
1. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，那么 $\sin A$ 的值为

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{4}{3}$



2. 如图， A, B, C 是 $\odot O$ 上的三个点， $\angle BOC=100^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数是

- (A) 80° (B) 50° (C) 40° (D) 60°



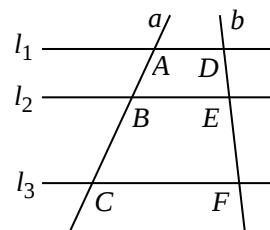
3. 把二次函数 $y=x^2-2x+4$ 化为 $y=a(x-h)^2+k(a \neq 0)$ 的形式，下列变形正确的是

- (A) $y=(x+1)^2+3$ (B) $y=(x-2)^2$
(C) $y=(x-1)^2+3$ (D) $y=(x-1)^2$

4. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，直线 a 被 l_1, l_2, l_3 所截得线段 AB, BC ，

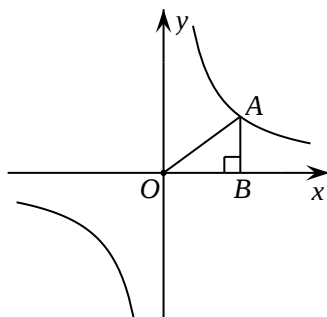
直线 b 被 l_1, l_2, l_3 所截得线段 DE, EF ，则下列等式错误的是

- (A) $\frac{AD}{BE} = \frac{BE}{CF}$ (B) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ (C) $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ (D) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

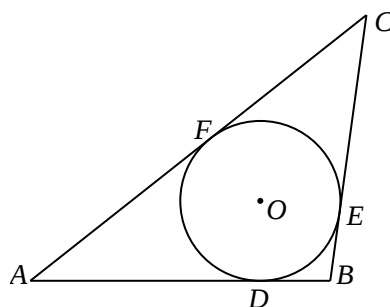


5. 已知点 A 在反比例函数图象上，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，若 $\triangle AOB$ 的面积为 1，则此反比例函数的表达式为

- (A) $y=\frac{2}{x}$ (B) $y=-\frac{2}{x}$ (C) $y=\frac{1}{x}$ (D) $y=-\frac{1}{x}$



第 5 题图



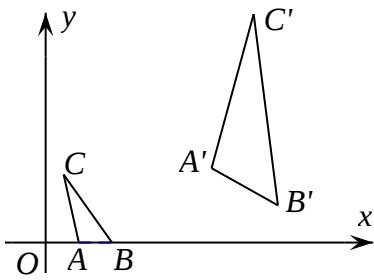
第 6 题图

6. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别是 D, E, F ， $AB=3$ ， $CE=2$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为

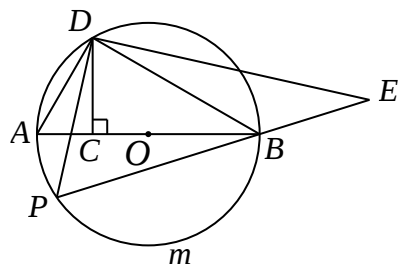
- (A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，且 $A(1, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $A'(4, 2)$ ， $B'(6, 1)$ ，

若 $\triangle ABC$ 的面积为1，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为



第7题图



第8题图

- (A) $\sqrt{3}$ (B) 3 (C) $\sqrt{5}$ (D) 5

8. 如图， $\odot O$ 的半径为 $2\sqrt{3}$ ， AB 为直径，过 AO 中点 C 作 $CD \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 D ，连接 AD ， BD ，点 P 为半圆 AmB 上一动点，连接 PD ，过点 D 作 $DE \perp PD$ ，交 PB 的延长线于点 E . 有如下描述

- ① $\angle ADB = 90^\circ$ ；
 ②当点 P 由点 A 向点 B 运动时， DE 的长增大；
 ③ $\angle E = 30^\circ$ ；
 ④ DE 最长时为6.

以上描述正确的有

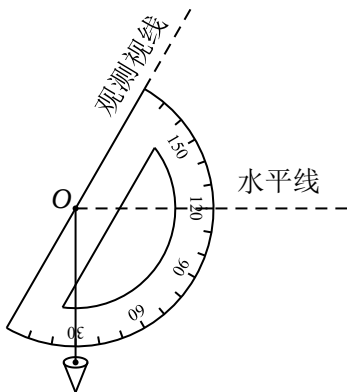
- (A) ①② (B) ②③ (C) ①③ (D) ①③④

二、填空题（共16分，每题2分）

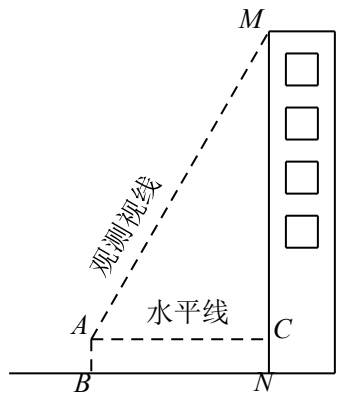
9. 函数 $y = \frac{3}{x}$ 的自变量 x 取值范围是_____.

10. 把二次函数 $y = 2x^2$ 图象向右平移2个单位，再向上平移1个单位所得图象的二次函数表达式为_____.

11. 某小组同学为测楼高自制了仰角测量仪，观测者的观测视线与水平线夹角如图1所示，此时观测视线与水平线的夹角为_____°，若观测者与楼的距离 BN 为10 m（如图2），则可测算 MC 长为_____m.（结果精确到0.1， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ）



第11题图1



第11题图2

12. 精美的瓷器易碎, 修补的技艺——“铜瓷”便应运而生(如图 1). 非凡的铜瓷技艺, 以巧夺天工般的神奇“魔法”使得瓷器“破镜重圆”的同时, 也让器物所附属的那份特定情感记忆得以传承, 继续陪在人们身边. 如图 2 一件圆形瓷器破坏了一部分, 测得圆形瓷器的直径为 12cm, 缺口 A, B 之间距离为 6 cm, 则 AB 的长为_____cm.

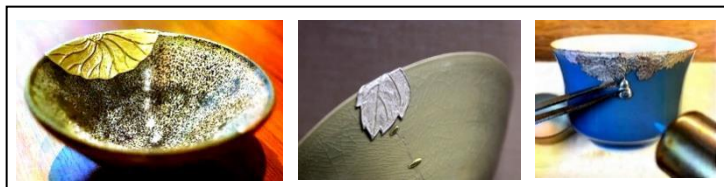
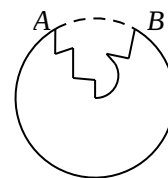
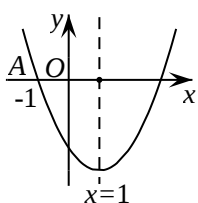


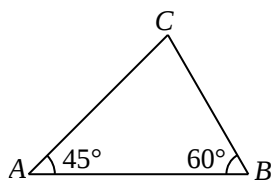
图 1

图 2

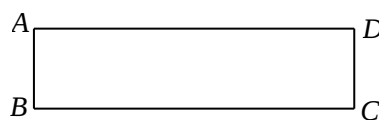
13. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 3 (a \neq 0)$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$. 除点 A 外, 请再写出此函数图象经过的一个点坐标_____.



第 13 题 图



第 14 题

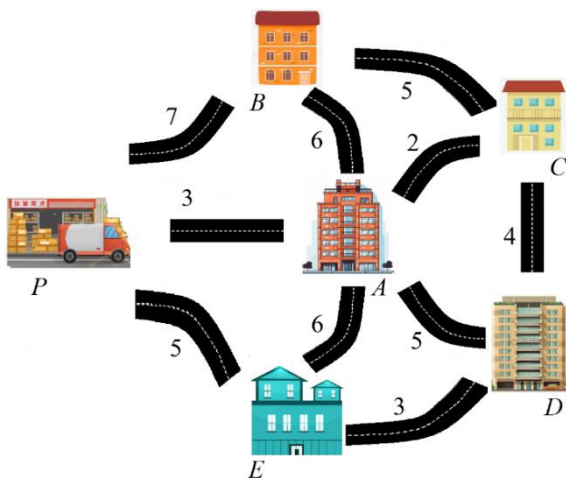


第 15 题 图

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 3\sqrt{2}$, 则 AB 的长为_____.

15. 如图一块矩形铁板 $ABCD$, 其中 $AD = 8\text{m}$, $AB = 2\text{m}$, 现需要将此铁板裁剪为直角三角形形状, 且需要以 AD 为斜边, 直角顶点 E 在 BC 上, 则 BE 长为_____m.

16. 某区域的快递网点位于 P 处, 负责区域内 A, B, C, D, E 五个小区的配送业务, 小区间有道路相连, 道路长度如图所示. 快递员每次配送任务都是从 P 处出发, 所有快件配送完毕即完成任务, 不用返回网点 P 处, 此过程希望快递员的总路程尽可能短. 若某次配送任务只包含 B, C 小区, 则配送的最短路程为_____. 若某次配送任务包含所有五个小区, 则最短总路程为_____.



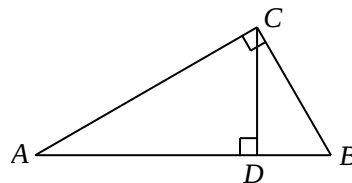
三、解答题（本题共 12 道小题，第 17~22 题，每小题 5 分，第 23~26 题，每小题 6 分，第 27~28 题，每小题 7 分，共 68 分）

17. 计算： $2\sin 45^\circ - (4 - \pi)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |1 - \sqrt{2}|$.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于点 D .

(1) 求证： $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ ；

(2) 若 $CD = \sqrt{3}$ ， $BD = 1$ ，求 AD .



19. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(2, -3)$ ， $B(-1, n)$.

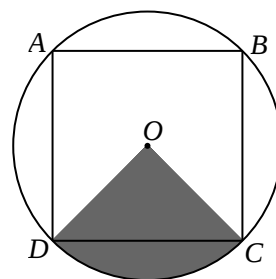
(1) 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A 和点 B ，求 k 和 n 的值；

(2) 若反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象与线段 OA 有交点，直接写出 m 的取值范围_____.

20. 如图， $\odot O$ 是边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的外接圆.

(1) 求 $\odot O$ 的半径；

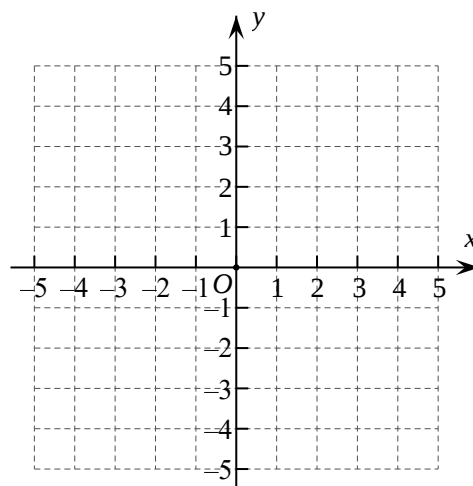
(2) 求图中阴影部分的扇形面积.



21. 已知二次函数 $y = x^2 - 4x + 3$.

(1) 求该二次函数图象的顶点坐标，并在平面直角坐标系 xOy 中画出函数图象；

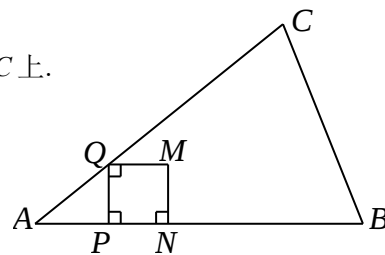
(2) 若 $1 < x < 4$ ，直接写出 y 的取值范围.



22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中.

求作：正方形 $DEFG$ ，两个顶点在 AB 上，另两个顶点分别在 BC 和 AC 上.

作法：



- ①在 AB 上任取一点 P ，作 $PQ \perp AB$ ，交 AC 于点 Q ；
- ②在 AB 上截取 $PN = PQ$ ，过点 N 和 Q 分别作 PN 和 PQ 的垂线，交于点 M ；
- ③作射线 AM 交 BC 于点 D ；
- ④过点 D 作 $DE \parallel MQ$ 交 AC 于点 E ，过点 D 作 $DG \parallel MN$ 交 AB 于点 G ，
- ⑤过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F 。

则正方形 $DEFG$ 为所求作正方形.

(1) 补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下面的证明.

证明： $\because \angle QPN = \angle MQP = \angle PNM = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 是矩形.

$\because PN = PQ$,

$\therefore$ 矩形 $MNPQ$ 是正方形.

$\because DE \parallel MQ$,

$\therefore \triangle AMQ \sim \triangle ADE$.

$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{MQ}{DE}$ () (填写依据).

同理可得： $\frac{AM}{AD} = \frac{MN}{DG}$.

$\therefore$ _____ = $\frac{MN}{DG}$.

$\because MN = MQ$.

$\therefore DE = DG$.

同理可得：四边形 $DEFG$ 为正方形.

23. 炮弹被射出后，在不计空气阻力的情况下其运动形成的轨迹是抛物线，高度 h （单位：米）与时间 t （单位：秒）满足二次函数表达式： $h = at^2 + bt + c (a \neq 0)$ ，具体数据如下表：

t	0	1	3	5	...
h	2	27	47	27	...

(1) 结合表中所给的数据，可知炮弹飞行的最高高度为_____米；

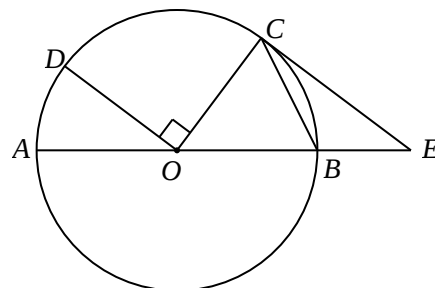
(2) 若炮弹高度为 42 米时，求炮弹的飞行时间.

24. 如图， $\odot O$ 直径为 AB ，点 C, D 为 $\odot O$ 上的两个点， $OC \perp OD$ ，过点 C 的直线交 AB 延长线于点 E ，且

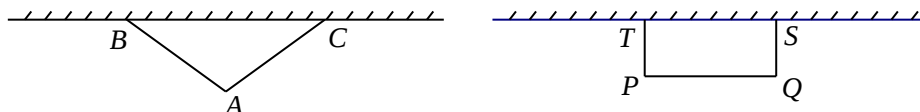
$$\angle BCE = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

(1) 求证： CE 为 $\odot O$ 的切线；

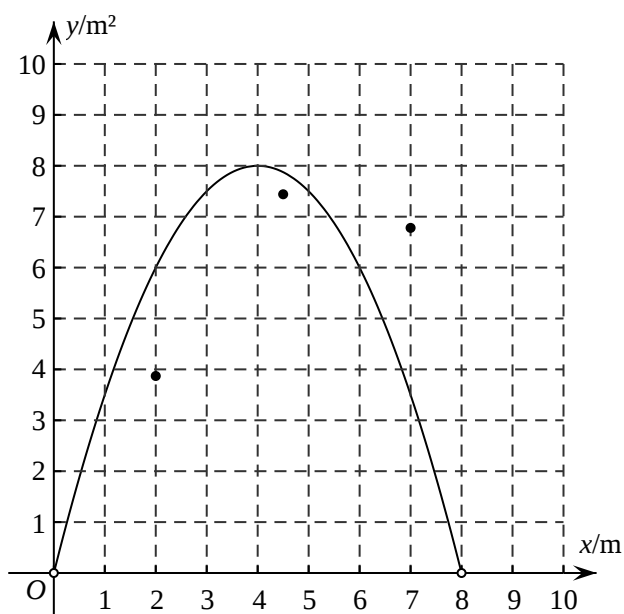
(2) 连接 BD ，若 $BC = 2\sqrt{5}$ ， $\tan \angle BCE = \frac{1}{2}$ ，求 BD 的长.



25. 如图，现有 8 m 长篱笆和一段墙，围成区域为等腰 $\triangle ABC$ 时面积为 $y_1 \text{ m}^2$ ，围成区域为矩形 $PQST$ 时面积为 $y_2 \text{ m}^2$ ，其中 $BC = TS = x \text{ m}$ ，统计数据如下表所示：



x	...	0.5	1	2	3	4	4.5	5	7	7.5	...
y_1	...	0.998	1.984	3.873	5.562	6.928	7.441	7.806	6.778	5.220	...
y_2	...	1.875	3.5	6	7.5	8	7.875	7.5	n	1.875	...



(1) 表格中 $n =$ _____；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，已经绘制 y_2 的图象和 y_1 图象上的部分点，补全 y_1 的图象；

(3) 根据图象，完成下列填空：

① 当 $x \approx$ _____ 时， $S_{\triangle ABC} = S_{\text{矩形} PQST}$ ；

② 当 $x \approx$ _____ 时， $S_{\triangle ABC} = 2S_{\text{矩形} PQST}$ 。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2-bx+1$ ($a \neq 0$) 过点 $(1, 2a^2+a+1)$.

(1) 求抛物线的对称轴 (用含 a 的式子表示);

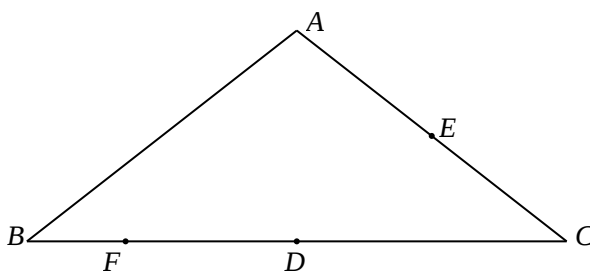
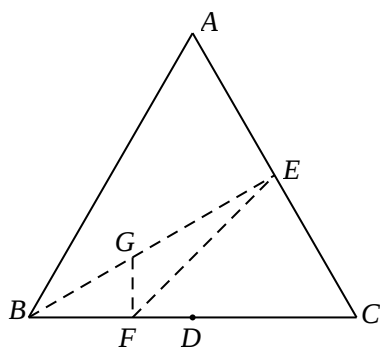
(2) 若对于抛物线上的两个点 $(a-2, y_1)$, $(2a-1, y_2)$, 都有 $y_1 < y_2$. 求 a 的取值范围.

27. 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$, $\angle BAC=\alpha$, 点 D, E 分别是 BC, AC 的中点，点 F 是线段 BD 上的动点，连接 EF , 点 D 关于 EF 的对称点是 G .

(1) 如图 1, 若 $\alpha=60^\circ$, 且点 G 恰好在线段 BE 上, 求 $\frac{BF}{DF}$;

(2) ①如图 2, 当 $60^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, 依题意补全图形;

②连接 AG, DG , 恰好 $AG=DG$, 用等式表示线段 BF, AC, BC 之间的数量关系, 并证明.



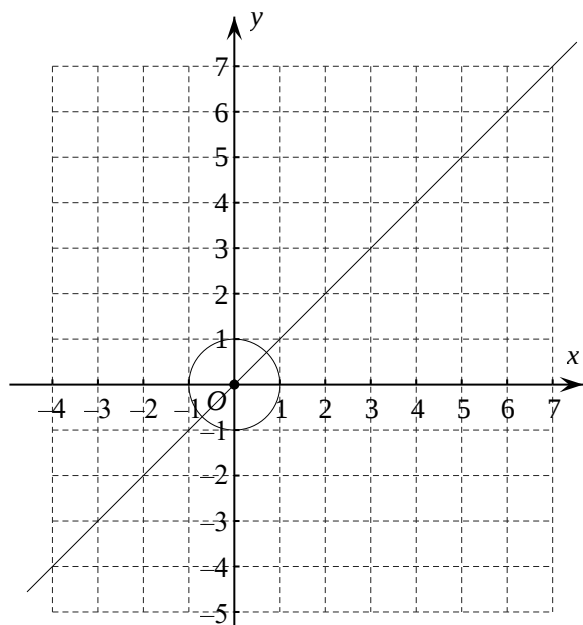
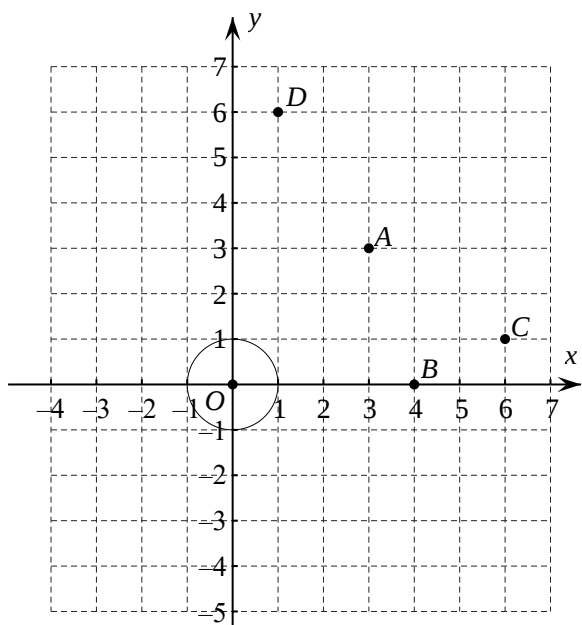
28. 在平面直角坐标系 xOy 中， $\odot O$ 的半径为 1，对于平面上的点 N 和 M 给出如下定义：若在 $\odot O$ 上能找到一点 P , 使得 $NM=k \cdot NP$ (k 为常数), 且 $\angle PNM=\alpha$ ($0 < \alpha \leq 180^\circ$), 则称点 M 是 $\odot O$ 关于点 N 的 (k, α) 关联点.

(1) 已知点 $A(3, 3)$.

①点 $B(4, 0)$, $C(6, 1)$, $D(1, 6)$ 中, 是 $\odot O$ 关于点 $A(1, 90^\circ)$ 关联点的是_____;

②若点 $E(a, b)$ 是 $\odot O$ 关于点 A 的 $(2, 90^\circ)$ 关联点, 则 b 的取值范围是_____;

(2) 点 $F(x_1, y_1)$ 是直线 $y=x$ 上一点, 点 G 是 $\odot O$ 关于点 F 的 $(\sqrt{2}, 45^\circ)$ 关联点, 若存在点 G 在直线 $x=-2$ 上, 求点 F 横坐标 x_1 的取值范围.



参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	A	A	D	D	C

二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	9	10	11	12
答案	$x \neq 0$	$y = 2(x-2)^2 + 1$	60° , 17.3	2π
题号	13	14	15	16
答案	(3, 0)或(0, -3) 不唯一	$3 + \sqrt{3}$	$4 - 2\sqrt{3}$ 和 $4 + 2\sqrt{3}$	10, 20

三、解答题

17. 解: $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 2 + \sqrt{2} - 1$ 4 分
 $= 2\sqrt{2}$ 5 分

18. (1) 证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$.
 又 $\because CD \perp AB$,
 $\therefore \angle ACD + \angle CAD = 90^\circ$.
 $\therefore \angle BCD = \angle CAD$2 分
 且 $\angle ADC = \angle CDB$,
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBD$3 分

(2) 解: $\because \triangle ACD \sim \triangle CBD$,
 $\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$ 4 分
 $\therefore AD = 3$ 5 分

19. 解: (1) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象经过点 $A(2, -3)$,
 $\therefore k = -6$2 分
 又 $\because B(-1, n)$ 在反比例函数 $y = \frac{-6}{x}$ 图象上,
 $\therefore n = 6$3 分
 (2) $-6 \leq m < 0$5 分

20. 解: (1) $\because$ 正方形 $ABCD$,
 $\therefore \angle COD = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ 1 分

又 $\because OD=OC$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ODC$ 中, $OC^2 + OD^2 = CD^2$ 2 分

$\therefore OC = 2\sqrt{2}$ 3 分

(2) 解: $S_{\text{扇形}} = \frac{n \cdot \pi \cdot r^2}{360} = \frac{90 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{360} = 2\pi$ 5 分

21. 解: (1) 顶点坐标(2, -1), 图象略.3 分

(2) $-1 \leq y < 3$5 分

22. 补全图形略.2 分

相似三角形的对应边成比例.4 分

$\frac{MQ}{DE}$ 5 分

23. 解: (1) 炮弹飞行的最高高度为 47m.2 分

(2) $\because$ 抛物线的顶点(3, 47),

$\therefore$ 设抛物线表达式为: $h = a(t-3)^2 + 47$ 3 分

$\because$ 抛物线过点(1, 27),

$\therefore 27 = a(1-3)^2 + 47$.

$\therefore a = -5$4 分

$\therefore h = -5(t-3)^2 + 47$.

当 $h=42$ 时, $42 = -5(t-3)^2 + 47$,

$\therefore t=2$ 或 4 6 分

答: 炮弹高度为 42 米时, 炮弹的飞行时间为 2 或 4 秒.

24. 解: (1) 方法一:

连接 AC .

$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ 1 分

$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$.

$\because OC = OB$,

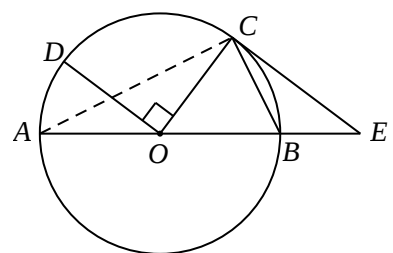
$\therefore \angle ABC = \angle OCB$2 分

$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BCE$,

$\therefore \angle BCE + \angle OCB = 90^\circ = \angle OCE$.

$\therefore OC \perp CE$3 分

$\therefore CE$ 是 $\odot O$ 的切线.



方法二:

$$\because OC=OB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC.$$

$$\because \angle BCE = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$$\therefore \angle OCB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOC = 90^\circ - \angle BCE.$$

$$\therefore \angle OCB + \angle BCE = 90^\circ.$$

$$\therefore OC \perp CE.$$

$\therefore CE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 方法一:

连接 CD , 过点 C 作 $CF \perp BD$ 于点 F .

$$\because \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 45^\circ. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCF \text{ 中, } BC^2 = BF^2 + CF^2 = 2BF^2 = 20.$$

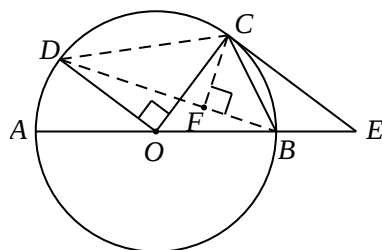
$$\therefore BF = CF = \sqrt{10}.$$

$$\because \angle CDB = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BCE, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore \tan \angle CDF = \tan \angle BCE = \frac{1}{2} = \frac{CF}{DF}.$$

$$\therefore DF = 2\sqrt{10}.$$

$$\therefore BD = BF + DF = 3\sqrt{10}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



方法二:

过点 C, D 作 AB 的垂线段 CG, DH , 连接 AC .

$$\tan \angle BCE = \tan \angle CAB = \tan \angle BCG = \frac{1}{2} = \frac{BC}{AC} = \frac{BG}{CG}.$$

$$\therefore AC = 4\sqrt{5}, AB = 10, CG = 2BG = 4, OG = 3.$$

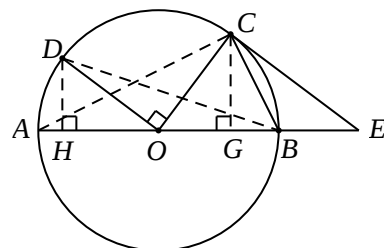
$\therefore$ 在 $\triangle COG$ 和 $\triangle ODH$ 中,

$$\begin{cases} \angle CGO = \angle OHD, \\ \angle COG = \angle DOH, \\ OC = OD, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle COG \cong \triangle ODH.$$

$$\therefore DH = OG = 3, OH = CG = 4.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BDH \text{ 中, } BD = 3\sqrt{10}.$$



方法三：

连接 AC ， BD 交于点 K ，连接 AD 。

$$\because \tan \angle CAB = \tan \angle BCE = \frac{1}{2} = \frac{BC}{AC},$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ,$$

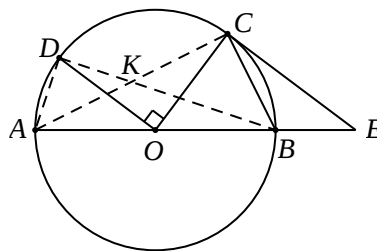
$$\therefore AC = 4\sqrt{5}.$$

$$\because \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CAD = 45^\circ.$$

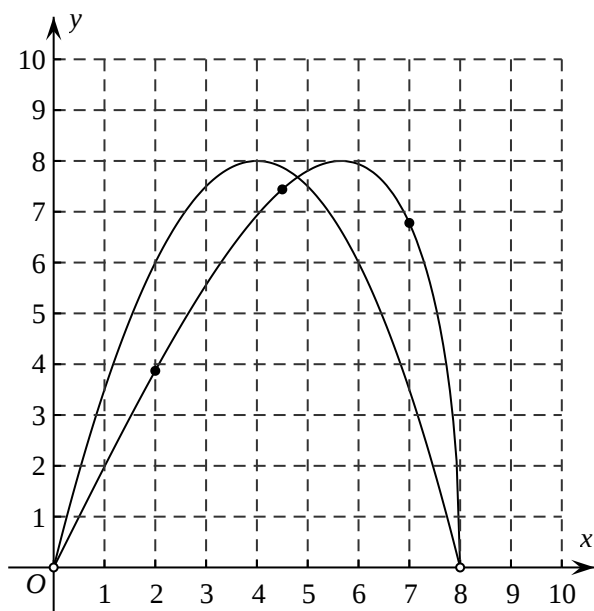
$$\therefore CK = BC = AK = 2\sqrt{5}, BK = 2\sqrt{10}, DK = \sqrt{10}.$$

$$\therefore BD = BK + DK = 3\sqrt{10}.$$



25.解：（1）表格中的 $n=3.5$ ；2 分

（2）图象如下：4 分



（3）① $x \approx 4.7$ （根据函数图象的变化趋势分析，图象的交叉点应在 4.5 到 5 之间）；

② $x \approx 7.1$ （根据函数表格或图象分析，可知应大于 7，且一定小 7.5）.6 分

26.解：（1） $x = -a$ 2 分

（2）代数法：

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 - bx + 1$ ($a \neq 0$) 过点 $(a-2, y_1)$, $(2a-1, y_2)$ ，由（1）知 $b = -2a^2$ ，抛物线的对称轴为 $x = -a$ ，

$$\therefore y_1 = a(a-2)^2 + b(a-2) + 1, y_2 = a(2a-1)^2 + b(2a-1) + 1.$$

$$\because y_1 < y_2,$$

$$\therefore y_1 - y_2 < 0.$$

$$\therefore [a(a-2)^2 - b(a-2) + 1] - [a(2a-1)^2 - b(2a-1) + 1] < 0.$$

$$\therefore a[(a-2)-(2a-1)][(a-2)+(2a-1)]+b[(2a-1)-(a-2)]<0.$$

$$\therefore [(a-2)-(2a-1)] \cdot [a(a-2)+a(2a-1)-b]<0.$$

$$\therefore b=-2a^2,$$

$$\therefore (-a-1)(5a^2-3a)<0.$$

$$\therefore a(a+1)(5a-3)>0.$$

当 $a>0$ 时, 有

$$\begin{cases} a+1>0, \\ 5a-3>0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a+1<0, \\ 5a-3<0. \end{cases}$$

$$\text{解得: } a>\frac{3}{5}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

当 $a<0$ 时, 有

$$\begin{cases} a+1<0, \\ 5a-3>0. \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a+1>0, \\ 5a-3<0. \end{cases}$$

$$\text{解得: } -1<a<0. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

综上所述, a 的取值范围是: $a>\frac{3}{5}$ 或 $-1<a<0$.

几何法:

抛物线的对称轴为 $x=-a$,

当 $a>0$ 时, 有

$x>-a$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x\leq -a$ 时, y 随 x 的增大而减小.

$\therefore 2a-1-(a-2)=a+1>0$, 即 $2a-1>a-2$, 则点 $(a-2, y_1)$ 在点 $(2a-1, y_2)$ 左边

$\therefore$ ①当两点都在对称轴左侧时, $y_1>y_2$, 舍;

②当两点都在对称轴右侧时, 由 $y_1<y_2$, 有

$$\begin{cases} a-2>-a, \\ a-2<2a-1. \end{cases}$$

解得: $a>1$

③当两点在对称轴两侧时, 点 $(a-2, y_1)$ 关于抛物线对称轴 $x=-a$ 的对称点为 $(-3a+2, y_1)$, 由 $y_1<y_2$, 有

$$\begin{cases} 2a-1>-a, \\ -3a+2<2a-1. \end{cases}$$

$$\text{解得: } a>\frac{3}{5}.$$

$$\therefore \text{当 } a>0 \text{ 时, } a>\frac{3}{5}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

当 $a<0$ 时, $a-2<-a$, 点 $(a-2, y_1)$ 在抛物线对称轴 $x=-a$ 的左侧

①点 $(2a-1, y_2)$ 在对称轴左侧时, 有

$$\begin{cases} a < 0, \\ 2a - 1 < -a, \\ a - 2 < 2a - 1. \end{cases}$$

解得： $-1 < a < 0$.

②点 $(2a-1, y_2)$ 在对称轴右侧时，点 $(a-2, y_1)$ 关于抛物线对称轴 $x = -a$ 的对称点为 $(-3a+2, y_1)$ ，由 $y_1 < y_2$ ，有

$$\begin{cases} a < 0, \\ 2a - 1 > -a, \\ -3a + 2 < 2a - 1. \end{cases}$$

此不等式组无解

∴当 $a < 0$ 时， $-1 < a < 0$6 分

综上所述， a 的取值范围是： $a > \frac{3}{5}$ 或 $-1 < a < 0$.

27. (1) ∵ $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha = 60^\circ$,

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

∴ $\angle ABC = \angle A = 60^\circ$1 分

点 D, E 分别是 BC, AC 的中点，

∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $\angle EBF = 30^\circ$.

∴ $DE \parallel AB$.

∴ $\angle EDC = \angle ABC = 60^\circ$.

∴ $\angle EDF = 120^\circ$.

∵ 点 D 关于 EF 的对称点是 G ,

∴ $\triangle EDF \cong \triangle EGF$.

∴ $FD = GF$, $\angle EGF = \angle EDF = 120^\circ$.

∴ $\angle BGF = 60^\circ$2 分

∴ $\angle BFG = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle BGF$ 中， $\tan \angle BGF = \frac{BF}{GF} = \sqrt{3}$.

∴ $\frac{BF}{DF} = \sqrt{3}$3 分

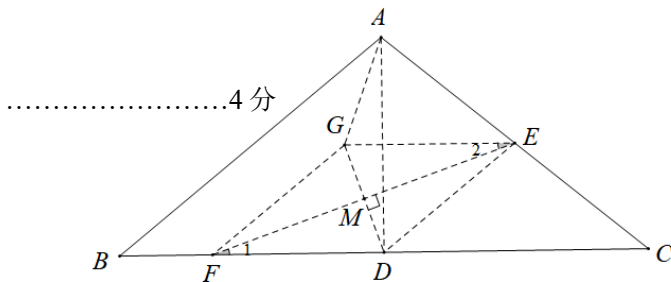
(2) ∵ $AB = AC$, 点 D 是 BC 的中点，

∴ $AD \perp BC$.

又 ∵ E 是 AC 中点，

∴ 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$$ED = AE = \frac{1}{2} AC.$$



.....4 分

又 $\because AG=DG$,

$\therefore EG$ 垂直平分 AD .

即 $AD \perp EG$ 且 $AD \perp BC$.

$\therefore GE \parallel FD$5 分

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because$ 点 D 关于 EF 的对称点是 G ,

$\therefore GE=ED, DM=MG$.

$\therefore \triangle GEM \cong \triangle DFM$.

$\therefore DF=EG$ 且 $GE \parallel FD$.

$\therefore$ 四边形 $GFDE$ 是平行四边形, 且 $EG=ED$.

$\therefore$ 平行四边形 $GFDE$ 是菱形.6 分

$\therefore DE=DF$.

$$DF = \frac{1}{2} AC .$$

又 $\because BF+DF=BF+\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BC$,

即 $2BF+AC=BC$7 分

28. (1) ① C 和 D2 分

② $7 \leq b \leq 11, -5 \leq b \leq -1$4 分

(2) $\therefore -2-\sqrt{2} \leq x \leq -2+\sqrt{2}$ 或 $2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2}$ 7 分

注: 所有题选取其他思路酌情给分.