

2025 北京石景山初三（上）期末

数 学

学校_____姓名_____准考证号

考 生 须 知	1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2. 在答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效。 4. 考试结束，请将本试卷和答题卡一并交回。
------------------	--

第一部分 选择题

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

下面各题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 若 $3y = 5x (xy \neq 0)$ ，则下列比例式正确的是

- (A) $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ (B) $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$ (C) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$ (D) $\frac{3}{5} = \frac{y}{x}$

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2$ 向左平移 1 个单位长度得到的抛物线为

- (A) $y = (x+1)^2$ (B) $y = (x-1)^2$ (C) $y = x^2 + 1$ (D) $y = x^2 - 1$

3. 半径为 6 的圆中， 60° 的圆心角所对的弧长为

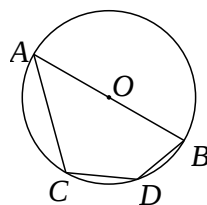
- (A) 2π (B) 3π (C) 4π (D) 6π

4. 若点 $A(x_1, -3)$ ， $B(x_2, 1)$ ， $C(x_3, 2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上，则 x_1 ， x_2 ， x_3 的大小关系是

- (A) $x_1 < x_2 < x_3$ (B) $x_2 < x_1 < x_3$ (C) $x_3 < x_2 < x_1$ (D) $x_1 < x_3 < x_2$

5. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C ， D 是 $\odot O$ 上两点. 若 $AC = CB$ ，则 $\angle D$ 的度数为

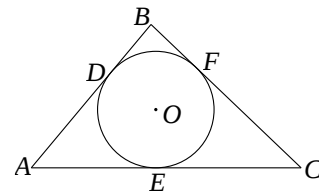
- (A) 125° (B) 135°
(C) 145° (D) 155°



6. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，如果 $a > 0$ ， $b < 0$ ， $c > 0$ ，那么它的图象

一定不经过

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限



7. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D ， E ，

F . 若 $CF = 7$ ， $AB = 9$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为

- (A) 16 (B) 23
(C) 25 (D) 32

8. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, c > 0$) 的自变量 x 与函数 y 的部分对应值如下表:

x	$\dots$	-2	1	2	$\dots$
y	$\dots$	c	0	m	$\dots$

给出下面三个结论:

- ① $a > 0$;
- ② $m < 0$;
- ③ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根分别为 $x_1 = 1, x_2 = -3$.

上述结论中, 所有正确结论的序号是

- (A) ①② (B) ①③ (C) ②③ (D) ①②③

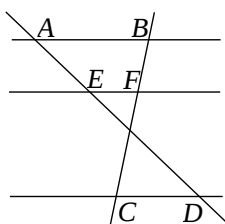
第二部分 非选择题

二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

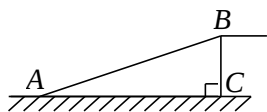
9. 若两个相似三角形对应边上的高之比是 2:3, 则它们的面积比是_____.

10. 如图, 直线 $AB \parallel EF \parallel CD$, EF 分别交 AD, BC 于点 E, F . 若 $AE=1, ED=2$,

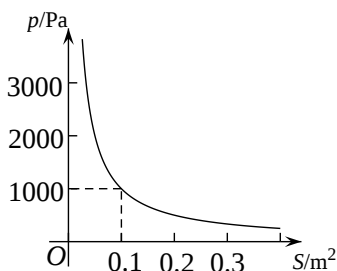
则 $\frac{BF}{FC}$ 的值为_____.



第 10 题图



第 11 题图



第 12 题图

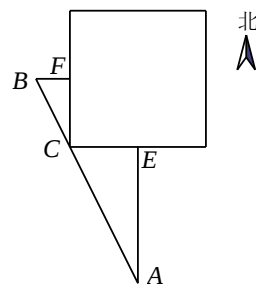
11. 如图, 斜坡 AB 的坡度为 1:3, 坡面 AB 的长为 $\sqrt{10}$ m, 则坡顶 B 到水平地面 AC 的距离为 m.

12. 在压力不变的情况下, 某物体所受到的压强 p (Pa) 是它的受力面积 S (m^2) 的反比例函数, 其图象如图所示. 当 $S = 0.2 m^2$ 时, 该物体所受到的压强为_____ Pa.

13. 写出一个函数表达式, 满足: 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 则此函数表达式可以为_____ (写出一个即可).

14. 若抛物线 $y = x^2 - x + c$ (c 是常数) 的顶点在 x 轴上, 则 c 的值是_____.

15. 中国古书《数理精蕴》中有一道题: 今有一座古方城, 四面正中都开门, 南门直行八里止, 脚下有座塔耸立, 又出西门二里停, 切城角恰见塔形, 请问诸君能算者, 方城每边长是几? 大意如下: 如图所示, 有一座正方形城池, 四面城墙的正中都有城门, 出南门 E 直行 8 里到宝塔 A 处 (即 $EA=8$ 里, $EA \perp EC$), 出西门 F 直行 2 里到 B 处 (即 $FB=2$ 里, $FB \perp FC$), 此时, 视线刚好经过城墙角 C 看见宝塔 A (即 B, C, A 三点共线), 问正方形城池每一面城墙长 (即正方形



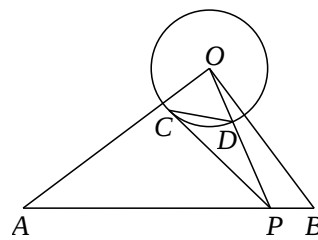
的边长)是多少里? 根据以上信息, 算出这座方城每一面的城墙长是_____里.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, $\angle AOB=90^\circ$, $OA=4$, $OB=3$,

$\odot O$ 的半径为 1, P 为线段 AB 上一点, 过点 P 作 $\odot O$ 的切线, 切点为 C , 连接 OP 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 CD .

(1) 当点 P 与点 A 重合时, $\sin \angle CPO$ 的值为_____;

(2) 当弦 CD 的长最小时, $\sin \angle CPO$ 的值为_____.



三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-22 题, 每题 5 分, 第 23-26 题, 每题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $2\sqrt{3}\cos 30^\circ - 4\tan 45^\circ \cdot \sin 45^\circ + \sqrt{8}$.

18. 已知: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=6$, $BC=2\sqrt{3}$, 解这个直角三角形.

19. 下面是小石设计的“过圆外一点作圆的切线”的尺规作图过程.

已知: $\odot O$ 及 $\odot O$ 外一点 P .

求作: 直线 PA 和直线 PB , 使得 PA 切 $\odot O$ 于点 A , PB 切 $\odot O$ 于点 B .

作法: 如图,

- ① 连接 OP , 作线段 OP 的垂直平分线, 交 OP 于点 Q ;
- ② 以点 Q 为圆心, OQ 的长为半径作圆, 交 $\odot O$ 于点 A 和点 B ;
- ③ 作直线 PA 和直线 PB .

所以直线 PA 和 PB 就是所求作的直线.

根据小石设计的尺规作图过程,

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形 (保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

证明: 连接 OA , OB .

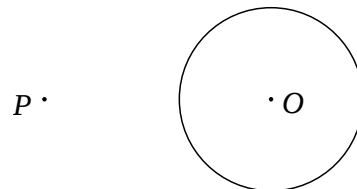
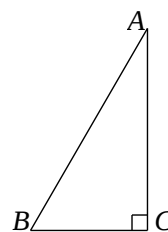
$\because OP$ 是 $\odot Q$ 的直径,

$\therefore \angle OAP = \angle OBP = \underline{\text{①}}$ (②) (填推理的依据).

$\therefore PA \perp OA$, $PB \perp OB$.

$\because OA$, OB 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore PA$, PB 是 $\odot O$ 的切线 (③) (填推理的依据).



20. 已知: 二次函数 $y = x^2 + bx + 3$ 的图象经过点 $(-1, 8)$.

(1) 求二次函数的表达式, 并用配方法求二次函数图象的顶点坐标;

(2) 求二次函数图象与 x 轴交点的坐标;

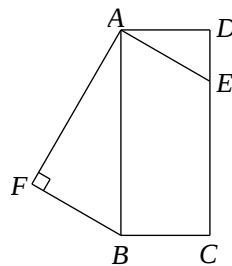
(3) 在平面直角坐标系 xOy 中, 画出此函数的图象.

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 为 CD 上一点， F 为矩形外一点， $\angle F=90^\circ$ ， $AF \perp AE$.

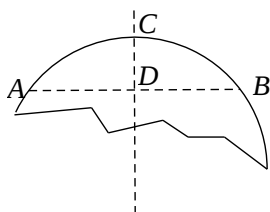
(1) 求证： $\triangle AFB \sim \triangle ADE$ ；

(2) 连接 BD 交 AE 于点 G ，若 $\frac{AD}{AF} = \frac{1}{2}$ ， $\angle FAB = 30^\circ$ ， $DE = 1$ ，

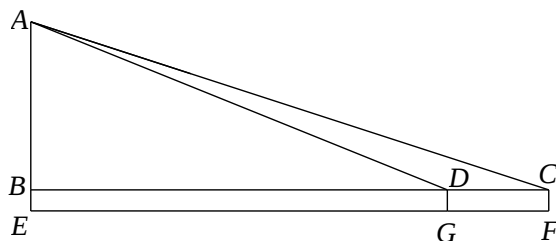
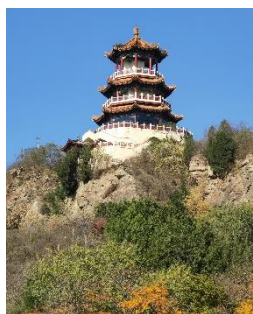
直接写出 AB 的长为____， EG 的长为_____.



22. 小慧家的圆形桌面被损坏，残留下的一部分如图所示. 小慧想重新配块同样大小的圆形桌面，进行了如下操作：首先在残留桌面的圆弧上任取两点 A, B ，连接 AB ，作 AB 的垂直平分线 CD 交 AB 于点 D ，交 AB 于点 C ，其次测量出 $AB=40\text{cm}$ ， $CD=10\text{cm}$ ，请帮助小慧求出此圆形桌面的半径.



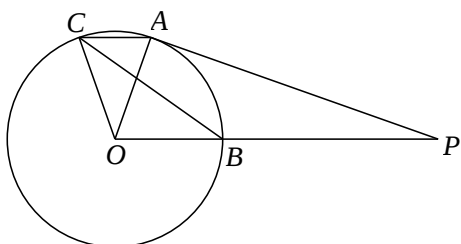
23. 首钢园区内的石景山被誉为“燕都第一仙山”，石景山上的功碑阁作为石景山区地标性建筑之一，彰显着地域文化魅力与历史底蕴. 某校社会实践小组选择了一处开阔平坦的区域进行测量活动. 如图， EF 是水平地面，在 F 处用高 1.2 m 的测角仪 CF 测得功碑阁顶 A 的仰角为 18° ，然后沿 FE 方向前行 80 m 到达 G 处，在 G 处测得功碑阁顶 A 的仰角为 22° . 根据以上测得的数据，求功碑阁顶 A 到水平地面 EF 的距离约为多少米. (参考数据： $\tan 18^\circ \approx 0.32$ ， $\sin 18^\circ \approx 0.31$ ， $\cos 18^\circ \approx 0.95$ ， $\tan 22^\circ \approx 0.40$ ， $\sin 22^\circ \approx 0.37$ ， $\cos 22^\circ \approx 0.93$.)



24. 如图， P 为 $\odot O$ 外一点，过点 P 作 $\odot O$ 的切线，切点为 A ，连接 OP 交 $\odot O$ 于点 B ， C 为 $\odot O$ 上一点， $CA \parallel OP$.

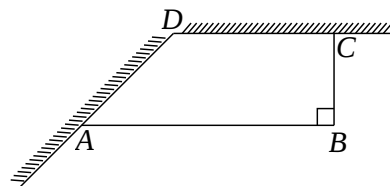
(1) 求证： $\angle AOB = 2\angle BCO$ ；

(2) 若 $AC=2$ ， $\cos \angle AOB = \frac{1}{3}$ ，求 AP 的长.



25. 如图所示, 有一直角梯形的苗圃, 它的两邻边借用了成 135° 的墙角(墙足够长), 另外两边由总长为 30 m 的篱笆围成.

- (1) 苗圃的面积 y (单位: m^2) 是 BC 的长 x (单位: m) 的函数, 求该函数的表达式, 并写出自变量 x 的取值范围;
- (2) 判断苗圃的面积能否达到 160 m^2 , 并说明理由.

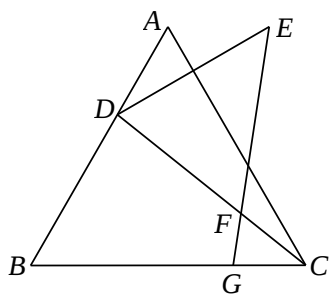


26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ ($a \neq 0$).

- (1) 求该抛物线的对称轴;
- (2) 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在抛物线上. 对于 $x_1 = -2$, $a - 1 < x_2 < a + 1$ 都有 $y_1 < y_2$, 求 a 的取值范围.

27. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上一点, 且 $AD < BD$, 点 D 关于直线 AC 的对称点为 E , 连接 CD , DE , 在直线 CD 上取一点 F , 使得 $\angle EFD = 60^\circ$, 直线 EF 与直线 BC 交于点 G .

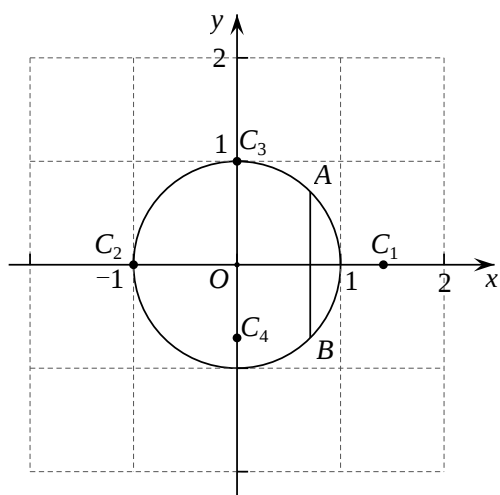
- (1) 若 $\angle ACD = \alpha$, 求 $\angle CGE$ 的度数 (用含 α 的代数式表示);
- (2) 用等式表示线段 AD 与 BG 的数量关系, 并证明.



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1. 对于点 C 和 $\odot O$ 的弦 AB 给出如下定义: 若弦 AB 上存在点 P , 使得 $CP \perp AB$, 且 $\frac{CP}{AB} = m$, 则称点 C 是弦 AB 的 “ m 倍及点”.

P , 使得 $CP \perp AB$, 且 $\frac{CP}{AB} = m$, 则称点 C 是弦 AB 的 “ m 倍及点”.

- (1) 如图, 点 $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.



①在点 $C_1(\sqrt{2}, 0)$, $C_2(-1, 0)$, $C_3(0, 1)$, $C_4(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 中, 弦 AB 的 “ $\frac{1}{2}$ 倍及点” 是_____;

②若点 D 是弦 AB 的 “1 倍及点”, 则 OD 的最大值为_____;

(2) 弦 $AB=1$, 直线 $y=x+b$ ($b>0$) 与 x 轴, y 轴分别交于点 M , N . 若线段 MN 上

存在点 C , 使得点 C 是弦 AB 的 “ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍及点”. 请直接写出 b 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	C	A	A	D	B	C	D	C

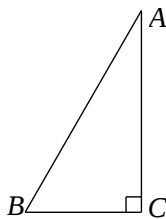
二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 4:9	10. $\frac{1}{2}$	11. 1	12. 500
13. 答案不唯一，如： $y = -x^2$	14. $\frac{1}{4}$	15. 8	16. (1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{5}{12}$.

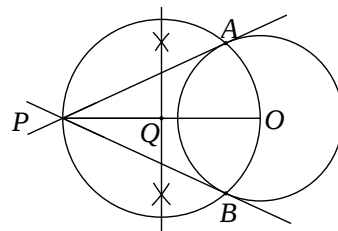
三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每题 5 分，第 23-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解：原式 $= 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}$
 $= 3.$ 5 分

18. 解：在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，
 $\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$ 2 分
 $\therefore \angle A = 30^\circ.$
 $\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ,$
 $AB = 2BC = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$
 $\therefore \angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 4\sqrt{3}.$ 5 分



19. (1) 尺规作图，如图所示.2 分
 (2) 90° ；直径所对的圆周角是直角；
 经过半径的外端，并且垂直于这条半径
 的直线是圆的切线.5 分



20. 解：(1) $\because$ 二次函数 $y = x^2 + bx + 3$ 的图象经过点 $(-1, 8)$ ，
 $\therefore (-1)^2 + (-1) \cdot b + 3 = 8.$
 $\therefore b = -4.$ 1 分
 $\therefore y = x^2 - 4x + 3.$
 $\because y = x^2 - 4x + 3$
 $= (x^2 - 4x + 4) - 1,$
 $= (x - 2)^2 - 1.$ 2 分
 $\therefore$ 顶点坐标为 $(2, -1).$ 3 分
 (2) 令 $y = 0$ ，得 $x^2 - 4x + 3 = 0.$

即 $(x-1)(x-3)=0$.

$\therefore x_1=1, x_2=3$.

$\therefore$ 二次函数图象与 x 轴交点的坐标为 $(1,0)$ 和 $(3,0)$4 分

(3) 图象略.5 分

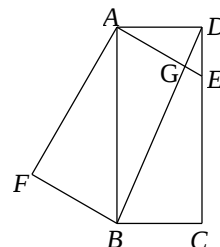
21. (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ$1 分

$\because AF \perp AE, \angle F = 90^\circ$,

$\therefore \angle F = \angle ADE, \angle FAB = \angle DAE$2 分

$\therefore \triangle AFB \sim \triangle ADE$3 分



(2) $4; \frac{2}{5}$5 分

22. 解: 设 AB 所在圆的圆心为 O , 半径为 r cm, 连接 OA, OB1 分

$\because OA = OB, CD$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore$ 点 O 在直线 CD 上.

$\because AB = 40, CD = 10$,

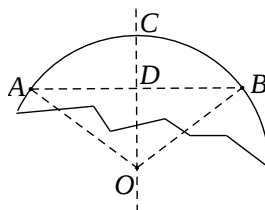
$\therefore DB = 20, OD = r - 10$.

在 $\text{Rt}\triangle BDO$ 中, $\angle ODB = 90^\circ$.

$\because OD^2 + DB^2 = OB^2$,

$\therefore (r - 10)^2 + 20^2 = r^2$.

解得 $r = 25$.



答: 此圆形桌面的半径为 25 cm.5 分

23. 解: 由题意, C, D, B 三点共线, $CD = FG = 80, BE = DG = CF = 1.2$.

设 $BD = x$, 则 $BC = x + 80$1 分

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 90^\circ, \angle ADB = 22^\circ$,

$\therefore AB = BD \cdot \tan \angle ADB \approx 0.4x$2 分

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, \angle ACB = 18^\circ$,

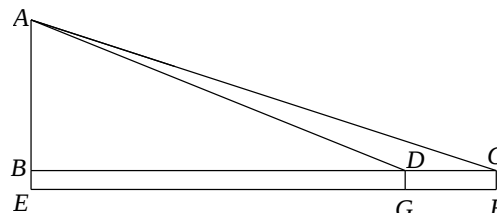
$\therefore AB = BC \cdot \tan \angle ACB \approx 0.32(x + 80)$3 分

$\therefore 0.4x = 0.32(x + 80)$4 分

$\therefore x = 320$5 分

$\therefore AB \approx 0.4x = 128$.

$\therefore AE = AB + BE \approx 128 + 1.2 = 129.2$.

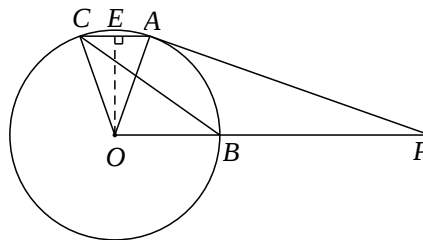


答: 功碑阁顶 A 到水平地面 EF 的距离约为 129.2 m.6 分

24. (1) 证明: $\because$ 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上,

$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$1 分

$\because CA \parallel OP,$
 $\therefore \angle ACB = \angle CBO.$
 $\because OC = OB,$
 $\therefore \angle CBO = \angle BCO.$
 $\therefore \angle ACB = \angle BCO.$
 $\therefore \angle AOB = 2\angle BCO.$



.....3 分

(2) 解: 过点 O 作 $OE \perp AC$ 于点 E , $AC=2$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AC = 1.$$

.....4 分

$\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ,

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ.$$

.....5 分

$\because CA \parallel OP,$

$$\therefore \angle CAO = \angle AOB.$$

$$\therefore \cos \angle CAO = \cos \angle AOB = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{EA}{OA} = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore OA = 3EA = 3, \quad OP = 3OA = 9.$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AOP$ 中,

$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = 6\sqrt{2}.$$

.....6 分

25. 解: (1) 由题意, $DC \parallel AB$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle ADC = 135^\circ$, $AB + BC = 30$.

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,

$$\therefore \angle AED = \angle B = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DAE = 180^\circ - \angle ADC = 45^\circ, \quad DE \parallel BC.$$

$$\therefore AE = DE = BC = x.$$

$$\therefore AB = 30 - x, \quad DC = EB = 30 - 2x.$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(30 - 2x + 30 - x) \cdot x$$

$$= -\frac{3}{2}x(x - 20)$$

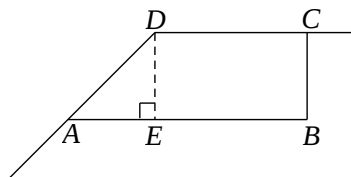
$$= -\frac{3}{2}x^2 + 30x.$$

.....3 分

由题意, $0 < BC < 30$ 且 $DC > 0$.

$$\therefore \begin{cases} 0 < x < 30, \\ 30 - 2x > 0. \end{cases}$$

解得 $0 < x < 15$.



$$\therefore y = -\frac{3}{2}x^2 + 30x \quad (0 < x < 15). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 判断：苗圃的面积不能达到 160 m^2 . \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

理由如下：

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + 30x = -\frac{3}{2}(x^2 - 20x) = -\frac{3}{2}(x - 10)^2 + 150.$$

$$\because 0 < x < 15, \text{ 且 } a = -\frac{3}{2} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = 10 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = 150.$$

$$\because 160 > 150,$$

\therefore \text{苗圃的面积不能达到 } 160 \text{ m}^2. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

26. 解：(1) 抛物线的对称轴为： $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}

(2) 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在抛物线上.

设点 $A(-2, y_1)$ 关于对称轴 $x = 1$ 的对称点为 $A'(x'_1, y_1)$,

$$\text{则 } x'_1 - 1 = 1 - (-2).$$

$$\therefore x'_1 = 4.$$

$$\therefore A'(4, y_1). \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

①若 $a > 0$,

则当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小.

(i) 当 $x_2 \leq 1$ 时,

$$\because \text{对于 } x_1 = -2, \quad a - 1 < x_2 < a + 1, \text{ 都有 } y_1 < y_2,$$

$$\therefore x_1 > x_2.$$

$$\therefore a + 1 \leq -2.$$

$$\therefore a \leq -3, \text{ 不符合题意.}$$

(ii) 当 $x_2 > 1$ 时,

$$\because \text{对于 } x_1 = -2, \quad a - 1 < x_2 < a + 1, \text{ 都有 } y_1 < y_2,$$

$$\therefore x'_1 < x_2, \text{ 即 } x_2 > 4.$$

$$\therefore a - 1 \geq 4.$$

$$\therefore a \geq 5. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

②若 $a < 0$,

则当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大.

(i) 当 $x_2 \leq 1$ 时,

$$\because \text{对于 } x_1 = -2, \quad a - 1 < x_2 < a + 1, \text{ 都有 } y_1 < y_2,$$

$$\therefore x_1 < x_2.$$

$$\therefore a-1 \geq -2.$$

$$\therefore a \geq -1.$$

(ii) 当 $x_2 > 1$ 时,

$\because$ 对于 $x_1 = -2$, $a-1 < x_2 < a+1$, 都有 $y_1 < y_2$,

$\therefore x_1' > x_2$, 即 $x_2 < 4$.

$$\therefore a+1 \leq 4.$$

$$\therefore a \leq 3.$$

综上所述, a 的取值范围是 $a \geq 5$ 或 $-1 \leq a < 0$6 分

27. (1) 解: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ.$$

$$\because \angle EFD = 60^\circ, \angle ACD = \alpha,$$

$$\therefore \angle GFC = \angle EFD = 60^\circ, \angle FCG = 60^\circ - \alpha.$$

$$\therefore \angle CGE = 180^\circ - 60^\circ - (60^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha. \text{2 分}$$

(2) 线段 AD 与 BG 的数量关系: $BG=2AD$3 分

证明: 连接 AE , CE , 延长 BA , GE , 交于点 H .

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB=AC, \angle B = \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ.$$

$\because$ 点 D 关于直线 AC 的对称点为 E ,

$$\therefore AC \text{ 垂直平分 } DE. \text{5 分}$$

$$\therefore AE=AD, CE=CD.$$

$$\therefore \angle EAC = \angle BAC = 60^\circ, \angle ECA = \angle DCA = \alpha.$$

$$\therefore \angle HAE = \angle CAE = 60^\circ.$$

$$\because \angle B + \angle H = \angle CGE = 60^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle H = \angle ECA = \alpha.$$

又 $\because AE=AE$,

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle AEC. \text{6 分}$$

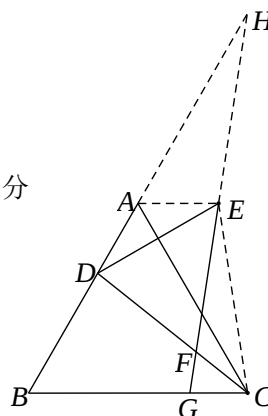
$$\therefore EH=EC, AH=AC=AB.$$

$$\because \angle ECB = 60^\circ + \alpha = \angle EGC,$$

$$\therefore EH=EC=EG.$$

$\therefore AE$ 为 $\triangle HBG$ 的中位线.

$$\therefore BG=2AE=2AD. \text{7 分}$$



28. 解: (1) ① $C_1(\sqrt{2}, 0)$, $C_4(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$2 分

② $\sqrt{5}$.

.....4 分

(2) $0 < b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sqrt{3} \leq b \leq \frac{\sqrt{26}}{2}$.

.....7 分