

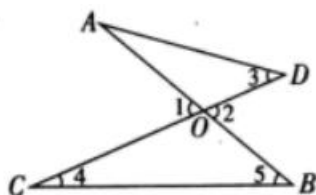
2011-2022 北京中考真题数学专项练习

三角形章节综合



一、单选题

1. (2020 北京中考真题) 如图, AB 和 CD 相交于点 O , 则下列结论正确的是 ()

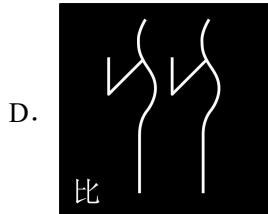
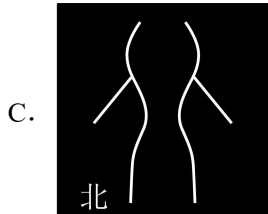
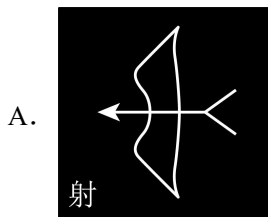


- A. $\angle 1 = \angle 2$ B. $\angle 2 = \angle 3$ C. $\angle 1 > \angle 4 + \angle 5$ D. $\angle 2 < \angle 5$

2. (2015 北京中考真题) 剪纸是我国传统的民间艺术, 下列剪纸作品中, 轴对称图形是 ()

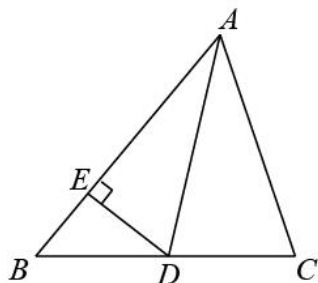


3. (2016 北京中考真题) 甲骨文是我国的一种古代文字, 是汉字的早期形式, 下列甲骨文中, 不是轴对称的是 ()

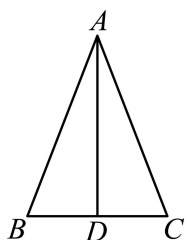


二、填空题

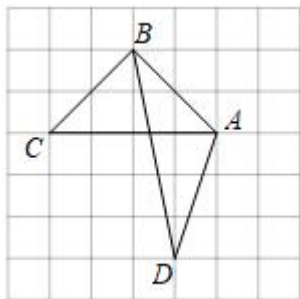
4. (2022 北京中考真题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$. 若 $AC = 2$, $DE = 1$, 则 $S_{\triangle ACD} = \underline{\hspace{2cm}}$.



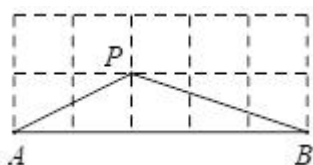
5. (2020 北京中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在 BC 上 (不与点 B , C 重合). 只需添加一个条件即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 这个条件可以是 (写出一个即可)



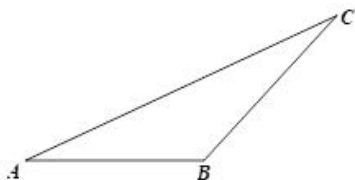
6. (2020 北京中考真题) 如图所示的网格是正方形网格, A, B, C, D 是网格交点, 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积的大小关系为: $S_{\triangle ABC}$ _____ $S_{\triangle ABD}$ (填“>”, “=”或“<”)



7. (2019 北京中考真题) 如图所示的网格是正方形网格, 则 $\angle PAB + \angle PBA =$ _____ $^\circ$ (点 A, B, P 是网格线交点).



8. (2019 北京中考真题) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 通过测量、计算得 $\triangle ABC$ 的面积约为 _____ cm^2 . (结果保留一位小数)



9. (2016 北京中考真题) 下面是“经过已知直线外一点作这条直线的垂线”的尺规作图过程.

已知：直线 l 和 l 外一点 P .

P .

_____ l

求作：直线 l 的垂线，使它经过点 P .

作法：如图.

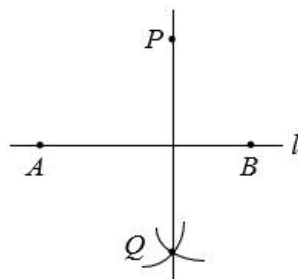
(1) 在直线 l 上任取两点 A, B ;

(2) 分别以点 A, B 为圆心， AP, BP 长为半径

作弧，两弧相交于点 Q ;

(3) 作直线 PQ .

所以直线 PQ 就是所求的垂线.



请回答：该作图的依据是_____.

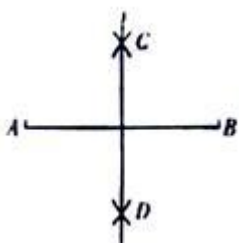
10. (2015 北京中考真题) 阅读下面材料：在教学课上，老师提出如下问题：尺规作图：作一条线段的垂直平分线.

已知：线段 AB .



求作：线段 AB 的垂直平分线.

小芸的作法如下：如图，(1) 分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 C, D 两点；(2) 作直线 CD . 所以直线 CD 就是所求作的垂直平分线.

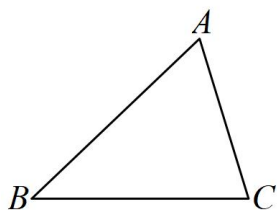


老师说：“小芸的作法正确.”

请回答：小芸的作图依据是_____.

三、证明题

11. (2022 北京中考真题) 下面是证明三角形内角和定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.



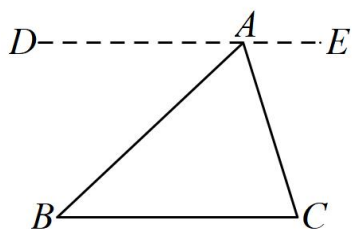
三角形内角和定理：三角形三个内角和等于 180° ,

已知：如图， $\triangle ABC$,

求证： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

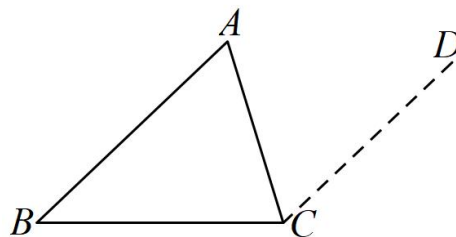
方法一

证明：如图，过点 A 作 $DE \parallel BC$.



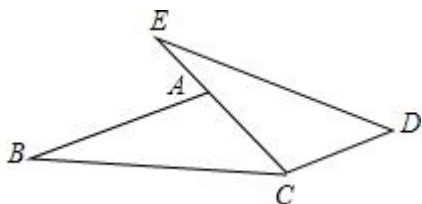
方法二

证明：如图，过点 C 作 $CD \parallel AB$.



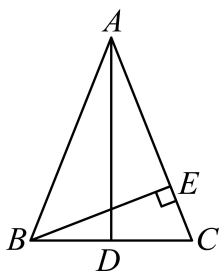
12. (2012 北京中考真题) 已知：如图，点 E, A, C 在同一条直线上， $AB \parallel CD$ ， $AB = CE$ ， $AC = CD$.

求证： $BC = ED$.



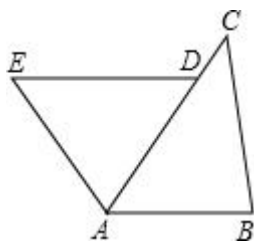
13. (2015 北京中考真题) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线， $BE \perp AC$ 于点 E .

求证： $\angle CBE = \angle BAD$.



14. (2013 北京中考真题) 如图，已知 D 是 AC 上一点， $AB = DA$ ， $DE \parallel AB$ ， $\angle B = \angle DAE$. 求证：

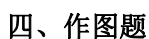
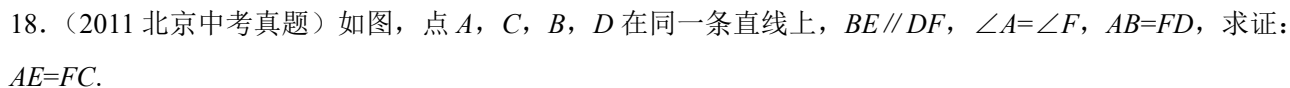
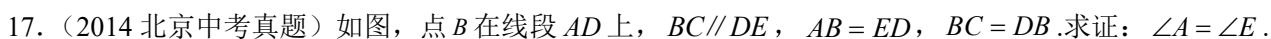
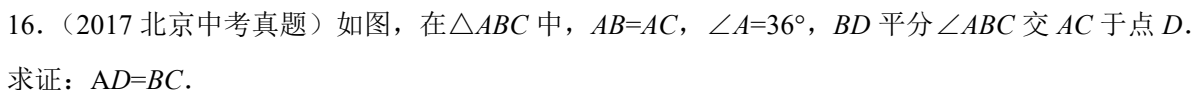
$BC = AE$.



15. (2017 北京中考真题) 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， P 是线段 BC 上一动点（与点 B, C 不重合），连接 AP ，延长 BC 至点 Q ，使得 $CQ = CP$ ，过点 Q 作 $QH \perp AP$ 于点 H ，交 AB 于点 M .

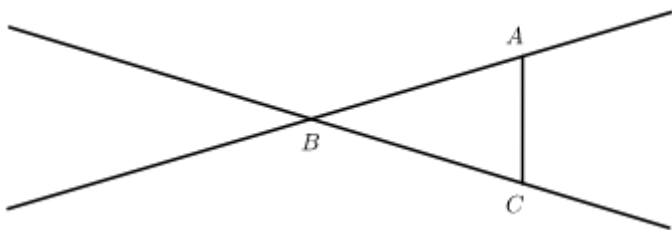
(1) 若 $\angle PAC = \alpha$ ，求 $\angle AMQ$ 的大小（用含 α 的式子表示）.

(2) 用等式表示线段 MB 与 PQ 之间的数量关系，并证明.



19. (2021 北京中考真题)《淮南子·天文训》中记载了一种确定东西方向的方法,大意是:日出时,在地面上点 A 处立一根杆,在地面上沿着杆的影子的方向取一点 B ,使 B, A 两点间的距离为 10 步(步是古代的一种长度单位),在点 B 处立一根杆;日落时,在地面上沿着点 B 处的杆的影子的方向取一点 C ,使 C, B 两点间的距离为 10 步,在点 C 处立一根杆.取 CA 的中点 D ,那么直线 DB 表示的方向为东西方向.

(1) 上述方法中, 杆在地面上的影子所在直线及点 A, B, C 的位置如图所示. 使用直尺和圆规, 在图中作 CA 的中点 D (保留作图痕迹);



(2) 在如图中，确定了直线 DB 表示的方向为东西方向．根据南北方向与东西方向互相垂直，可以判断直线 CA 表示的方向为南北方向，完成如下证明．

证明：在 $\triangle ABC$ 中， $BA = \underline{\hspace{2cm}}$ ， D 是 CA 的中点，

$\therefore CA \perp DB$ ($\underline{\hspace{2cm}}$) (填推理的依据)．

$\because$ 直线 DB 表示的方向为东西方向，

$\therefore$ 直线 CA 表示的方向为南北方向．

20. (2016 北京中考真题) 在等边 $\triangle ABC$ 中，

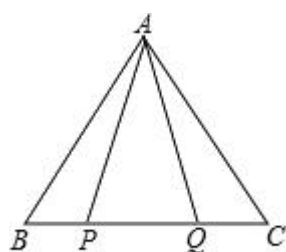


图1

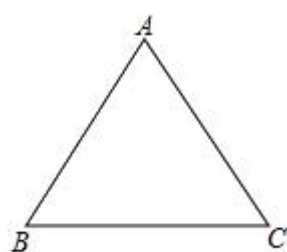


图2

(1) 如图 1， P, Q 是 BC 边上的两点， $AP=AQ$ ， $\angle BAP=20^\circ$ ，求 $\angle AQB$ 的度数；

(2) 点 P, Q 是 BC 边上的两个动点 (不与点 B, C 重合)，点 P 在点 Q 的左侧，且 $AP=AQ$ ，点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M ，连接 AM, PM ．

①依题意将图 2 补全；

②小茹通过观察、实验提出猜想：在点 P, Q 运动的过程中，始终有 $PA=PM$ ，小茹把这个猜想与同学们进行交流，通过讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

想法 1：要证明 $PA=PM$ ，只需证 $\triangle APM$ 是等边三角形；

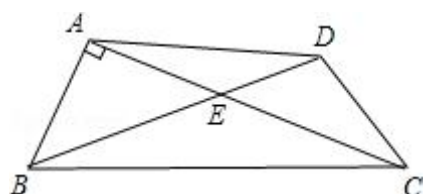
想法 2：在 BA 上取一点 N ，使得 $BN=BP$ ，要证明 $PA=PM$ ，只需证 $\triangle ANP \cong \triangle PCM$ ；

想法 3：将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60° ，得到线段 BK ，要证 $PA=PM$ ，只需证 $PA=CK$ ， $PM=CK$ ．

请你参考上面的想法，帮助小茹证明 $PA=PM$ (一种方法即可)．

五、问答题

21. (2012 北京中考真题) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 E ， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\angle CED=45^\circ$ ， $\angle DCE=30^\circ$ ， $DE=\sqrt{2}$ ， $BE=2\sqrt{2}$ ．求 CD 的长和四边形 $ABCD$ 的面积．



参考答案

1. A

【分析】根据对顶角性质、三角形外角性质分别进行判断，即可得到答案.

【详解】解：由两直线相交，对顶角相等可知 A 正确；

由三角形的一个外角等于它不相邻的两个内角的和可知

B 选项为 $\angle 2 > \angle 3$,

C 选项为 $\angle 1 = \angle 4 + \angle 5$,

D 选项为 $\angle 2 > \angle 5$.

故选：A.

【点睛】本题考查了三角形的外角性质，对顶角性质，解题的关键是熟练掌握三角形的外角性质进行判断.

2. D

【分析】根据轴对称图形的概念进而判断求解.

【详解】解：A、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

B、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

C、不是轴对称图形，故此选项不合题意；

D、是轴对称图形，故此选项符合题意；

故选 D.

【点睛】考查了轴对称图形，轴对称图形的判断方法：把某个图象沿某条直线折叠，如果图形的两部分能够重合，那么这个是轴对称图形.

3. D

【详解】A. 是轴对称图形，故本选项错误；

B. 是轴对称图形，故本选项错误；

C. 是轴对称图形，故本选项错误；

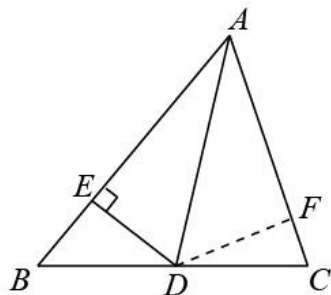
D. 不是轴对称图形，故本选项正确.

故选 D.

4. 1

【分析】作 $DF \perp AC$ 于点 F ，由角平分线的性质推出 $DF = DE = 1$ ，再利用三角形面积公式求解即可.

【详解】解：如图，作 $DF \perp AC$ 于点 F ，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$$\therefore DF = DE = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1.$$

故答案为：1.

【点睛】本题考查角平分线的性质，通过作辅助线求出三角形 ACD 中 AC 边上的高是解题的关键.

5. $\angle BAD = \angle CAD$ (或 $BD = CD$)

【分析】证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ，已经具备 $AB = AC, AD = AD$ ，根据选择的判定三角形全等的判定方法可得答案.

【详解】解： $\because AB = AC, AD = AD$,

$\therefore$ 要使 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$,

则可以添加： $\angle BAD = \angle CAD$,

此时利用边角边判定： $\triangle ABD \cong \triangle ACD$,

或可以添加： $BD = CD$,

此时利用边边边判定： $\triangle ABD \cong \triangle ACD$,

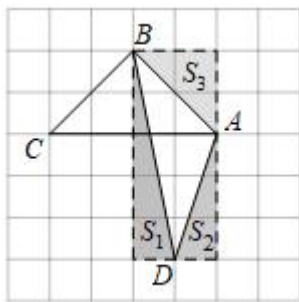
故答案为： $\angle BAD = \angle CAD$ 或 ($BD = CD$.)

【点睛】本题考查的是三角形全等的判定，属开放性题，掌握三角形全等的判定是解题的关键.

6. =

【分析】在网格中分别计算出三角形的面积，然后再比较大小即可.

【详解】解：如下图所示，设小正方形网格的边长为 1 个单位，



由网格图可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ 个平方单位，

$$S_{\triangle ABD} = 5 \times 2 - S_1 - S_2 - S_3 = 10 - \frac{1}{2} \times 1 \times 5 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4,$$

故有 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$.

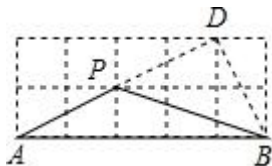
故答案为：“=”

【点睛】本题考查了三角形的面积公式，在网格中当三角形的底和高不太好求时可以采用割补的方式进行求解，用大的矩形面积减去三个小三角形的面积即得到 $\triangle ABD$ 的面积.

7. 45

【分析】延长 AP 交格点于 D ，连接 BD ，根据勾股定理得到 $PD^2 = BD^2 = 1 + 2^2 = 5$ ， $PB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ ，求得 $PD^2 + DB^2 = PB^2$ ，于是得到 $\angle PDB = 90^\circ$ ，根据三角形外角的性质即可得到结论.

【详解】解：延长 AP 交格点于 D，连接 BD，



则 $PD^2=BD^2=1+2^2=5$ ， $PB^2=1^2+3^2=10$ ，

$$\therefore PD^2+DB^2=PB^2,$$

$$\therefore \angle PDB=90^\circ,$$

即 $\triangle PBD$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore \angle DPB=\angle PAB+\angle PBA=45^\circ,$$

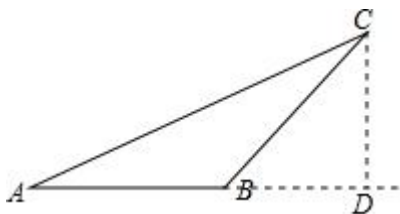
故答案为：45.

【点睛】本题考查了勾股定理的逆定理，勾股定理，三角形的外角的性质，等腰直角三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

8. 1.9

【分析】过点 C 作 $CD \perp AB$ 的延长线于点 D，测量出 AB，CD 的长，再利用三角形的面积公式即可求出 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 的延长线于点 D，如图所示.



经过测量， $AB=2.2\text{cm}$ ， $CD=1.7\text{cm}$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2.2 \times 1.7 \approx 1.9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

故答案为 1.9.

【点睛】本题考查了三角形的面积，牢记三角形的面积等于底边长与高线乘积的一半是解题的关键.

9. 故答案为：到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上.（其他正确依据也可以）.

【分析】由 $AP=AQ$ 、 $BP=BQ$ ，依据到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上知点 A、B 在线段 PQ 的中垂线上，据此可得 $PQ \perp l$.

【详解】由作图可知， $AP=AQ$ ，所以，点 A 在线段 PQ 的垂直平分线上，同理，点 B 也在线段 PQ 的垂直平分线上，所以，有 $AB \perp PQ$.

故答案为：到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上.

【点睛】本题主要考查作图-基本作图，解题的关键是熟练掌握线段中垂线的性质及过直线外一点作已知直线的垂线的尺规作图.

10. 到线段两个端点距离相等的点在线段的垂直平分线上：两点确定走一条直线.

【详解】试题分析：本题考查了线段垂直平分线的作法，分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 C，D 两点，根据两点决定一条直线，连接 CD，根据线段垂直平分线的性质和线的性质可得线段 AB 的垂直平分线.

考点：线段垂直平分线的作法；直线的性质

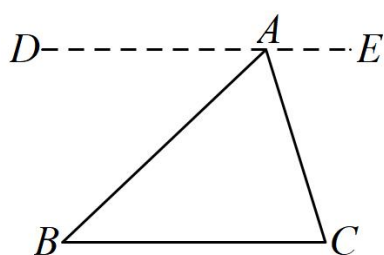
11. 答案见解析

【分析】方法一：依据平行线的性质，即可得到 $\angle B = \angle BAD$ ， $\angle C = \angle EAC$ ，从而可求证三角形的内角和为 180° .

方法二：由平行线的性质得： $\angle A = \angle ACD$ ， $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$ ，从而可求证三角形的内角和为 180° .

【详解】证明：

方法一：过点 A 作 $DE \parallel BC$ ，



则 $\angle B = \angle BAD$ ， $\angle C = \angle EAC$. (两直线平行，内错角相等)

$\because$ 点 D，A，E 在同一条直线上，

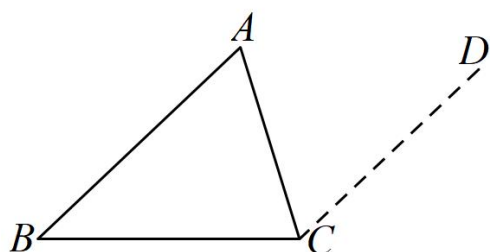
$\therefore \angle DAB + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$. (平角的定义)

$\therefore \angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$.

即三角形的内角和为 180° .

方法二：

如图，过点 C 作 $CD \parallel AB$.



$\because CD \parallel AB$,

$\therefore \angle A = \angle ACD$ ， $\angle B + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle ACB + \angle A = 180^\circ$.

即三角形的内角和为 180° .

【点睛】本题主要考查了平行线的性质以及三角形内角和定理的运用，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

12. 见解析

【分析】首先由 $AB \parallel CD$ ，根据平行线的性质可得 $\angle BAC = \angle ECD$ ，再由条件 $AB = CE$ ， $AC = CD$ 可证出 $\triangle BAC$ 和 $\triangle ECD$ 全等，再根据全等三角形对应边相等证出 $CB = ED$ 。

【详解】证明： $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle ECD$ ，

$\because$ 在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$AB = EC$ ， $\angle BAC = \angle ECD$ ， $AC = CD$ ，

$\therefore \triangle BAC \cong \triangle ECD$ (SAS)。

$\therefore CB = ED$ 。

【点睛】本题考查了平行线的性质，全等三角形的判定和性质。

13. 见解析

【分析】根据等腰三角形的性质得出 $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$ ，再根据 $\angle C$ 为公共角即可得 $\angle CBE = \angle CAD$ 。再有等腰三角形的三线合一，可以得到 $\angle BAD = \angle CAD$ ，再通过等量代换即可得到结果。

【详解】 $\because AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线， $\therefore AD \perp BC$ ，

又 $\because BE \perp AC$ ， $\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBE + \angle C = \angle CAD + \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CBE = \angle CAD$ 。

$\because AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle BAD$ 。

14. 见解析

【分析】根据两直线平行，内错角相等求出 $\angle CAB = \angle ADE$ ，然后利用“角边角”证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DAE$ 全等，再根据全等三角形对应边相等证明即可。

【详解】证明： $\because DE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle ADE$ 。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DAE$ 中， $\because \begin{cases} \angle CAB = \angle ADE \\ AB = DA \\ \angle B = \angle DAE \end{cases}$ ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DAE$ (ASA)。

$\therefore BC = AE$ 。

【点睛】本题考查了三角形全等判定和性质，解题的关键是熟练掌握三角形全等的判定方法。

15. (1) $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$ ； (2) 线段 MB 与 PQ 之间的数量关系： $PQ = \sqrt{2} MB$ ，理由见解析。

【分析】(1) 由直角三角形性质，两锐角互余，可得 $\angle AMQ = 180^\circ - \angle AHM - \angle PAM$ ，解得 $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$ ；

(2) 由题意得 $AP = AQ = QM$ ，再证 $Rt\triangle APC \cong Rt\triangle QME$ ，全等三角形对应边相等得出 $PC = ME$ ，得出 $\triangle MEB$ 为等腰直角三角形，则 $PQ = \sqrt{2} BM$ 。

【详解】(1) $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$ 。理由如下：

$\because \angle PAC = \alpha$ ， $\triangle ACB$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle PAB = 45^\circ - \alpha, \quad \angle AHM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMQ = 180^\circ - \angle AHM - \angle PAM = 45^\circ + \alpha;$$

(2) 线段 MB 与 PQ 之间的数量关系: $PQ = \sqrt{2} MB$.

理由如下:

连接 AQ , 过点 M 作 $ME \perp QB$,

$$\because AC \perp QP, \quad CQ = CP,$$

$$\therefore \angle QAC = \angle PAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle QAM = \alpha + 45^\circ = \angle AMQ,$$

$$\therefore AP = AQ = QM,$$

在 $Rt\triangle APC$ 和 $Rt\triangle QME$ 中,

$$\begin{cases} \angle MQE = \angle PAC \\ \angle ACP = \angle QEM \\ AP = QM \end{cases}$$

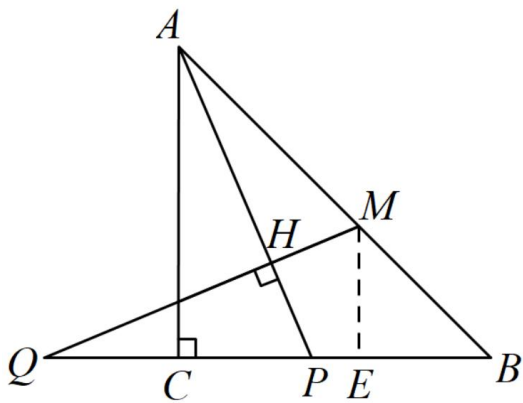
$$\therefore Rt\triangle APC \cong Rt\triangle QME,$$

$$\therefore PC = ME,$$

$\therefore \triangle MEB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \frac{1}{2} PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} MB,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{2} MB.$$



16. 证明见解析.

【详解】由等腰三角形性质及三角形内角和定理, 可求出 $\angle ABD = \angle C = \angle BDC$. 再据等角对等边, 及等量代换即可求解.

试题解析: $\because AB = AC, \quad \angle A = 36^\circ \therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$, 又 $\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ, \quad \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ, \therefore \angle C = \angle BDC, \quad \angle A = \angle ABD$,

$$\therefore AD = BD = BC.$$

17. 证明见解析

【分析】若要证明 $\angle A = \angle E$, 只需证明 $\triangle ABC \cong \triangle EDB$, 题中已给了两边对应相等, 只需看它们的夹角是否

相等，已知给了 $DE \parallel BC$ ，可得 $\angle ABC = \angle BDE$ ，因此利用 SAS 问题得解.

【详解】 $\because DE \parallel BC$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDE$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDB$ 中

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle ABC = \angle BDE, \\ BC = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDB \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle A = \angle E$$

18. 证明见解析.

【分析】由已知条件 $BE \parallel DF$ ，可得出 $\angle ABE = \angle D$ ，再利用 ASA 证明 $\triangle ABE \cong \triangle FDC$ 即可.

【详解】证明： $\because BE \parallel DF$,

$$\therefore \angle ABE = \angle D,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDC$ 中，

$$\angle ABE = \angle D, AB = FD, \angle A = \angle F$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FDC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = FC.$$

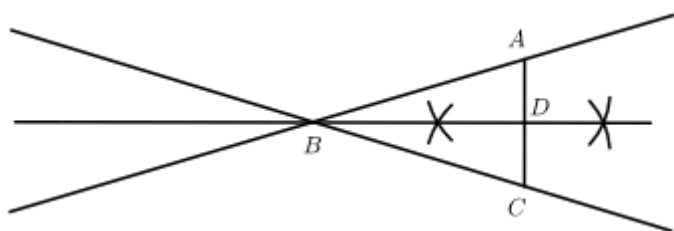
【点睛】此题主要考查全等三角形的判定与性质和平行线的性质等知识点的理解和掌握，此题的关键是利用平行线的性质求证 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FDC$ 全等.

19. (1) 图见详解；(2) BC ，等腰三角形的三线合一

【分析】(1) 分别以点 A 、 C 为圆心，大于 AC 长的一半为半径画弧，交于两点，然后连接这两点，与 AC 的交点即为所求点 D ；

(2) 由题意及等腰三角形的性质可直接进行作答.

【详解】解：(1) 如图所示：



(2) 证明：在 $\triangle ABC$ 中， $BA = BC$ ， D 是 CA 的中点，
 $\therefore CA \perp DB$ （等腰三角形的三线合一）（填推理的依据）.

$\because$ 直线 DB 表示的方向为东西方向，

$\therefore$ 直线 CA 表示的方向为南北方向；

故答案为 BC ，等腰三角形的三线合一.

【点睛】本题主要考查垂直平分线的尺规作图及等腰三角形的性质，熟练掌握垂直平分线的尺规作图及等

腰三角形的性质是解题的关键.

20. (1) 80° ; (2) ①补图见解析; ② 证明见解析

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质得到 $\angle APQ = \angle AQP$, 由邻补角的定义得到 $\angle APB = \angle AQC$, 根据三角形外角的性质即可得到结论;

(2) ①根据要求作出图形, 如图 2;

②根据等腰三角形的性质得到 $\angle APQ = \angle AQP$, 由邻补角的定义得到 $\angle APB = \angle AQC$, 由点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M , 得到 $AQ = AM$, $\angle QAC = \angle MAC$, 等量代换得到 $\angle MAC = \angle BAP$, 推出 $\triangle APM$ 是等边三角形, 根据等边三角形的性质即可得到结论.

【详解】解: (1) $\because AP = AQ$,

$$\therefore \angle APQ = \angle AQP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AQC,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAQ = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AQB = \angle CAQ + \angle C = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ;$$

(2) ①如图 2;

② $\because AP = AQ$,

$$\therefore \angle APQ = \angle AQP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AQC,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAQ,$$

$\because$ 点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M ,

$$\therefore AQ = AM, \angle QAC = \angle MAC,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle BAP,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle PAC = \angle MAC + \angle CAP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PAM = 60^\circ,$$

$$\because AP = AQ,$$

$$\therefore AP = AM,$$

$\therefore \triangle APM$ 是等边三角形,

$$\therefore AP = PM.$$

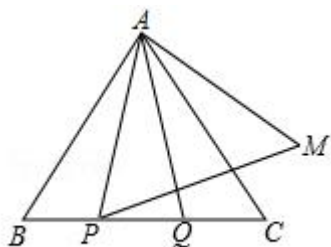
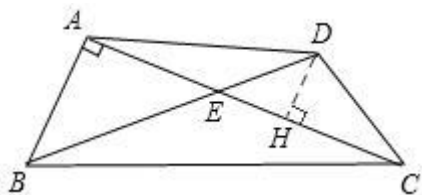


图2

21. $CD=2$; 四边形 $ABCD$ 的面积是 $\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$

【分析】利用等腰直角三角形的性质得出 $EH=DH=1$ ，进而得出再利用直角三角形中 30° 所对边等于斜边的一半得出 CD 的长，求出 AC ， AB 的长即可得出四边形 $ABCD$ 的面积。

【详解】解：如图，过点 D 作 $DH \perp AC$ ，



$\because \angle CED=45^\circ$ ， $DH \perp EC$ ， $DE=\sqrt{2}$ ， $\therefore EH=DH$ 。

$\because EH^2+DH^2=ED^2$ ， $\therefore EH^2=1$ 。 $\therefore EH=DH=1$ 。

又 $\because \angle DCE=30^\circ$ ， $\therefore CD=2$ ， $HC=\sqrt{3}$ 。

$\because \angle AEB=45^\circ$ ， $\angle BAC=90^\circ$ ， $BE=2\sqrt{2}$ 。 $\therefore AB=AE=2$ 。

$\therefore AC=2+1+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$ 。

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2} \times 2 \times (3+\sqrt{3}) + \sqrt{3} \times 1 \times (3+\sqrt{3}) = \frac{9+3\sqrt{3}}{2}$ 。