

2011-2023 北京中考真题数学专项练习

四边形章节综合

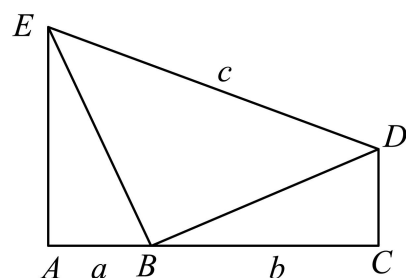


一、单选题

1. (2023 北京中考真题) 正十二边形的外角和为 ()

- A. 30° B. 150° C. 360° D. 1800°

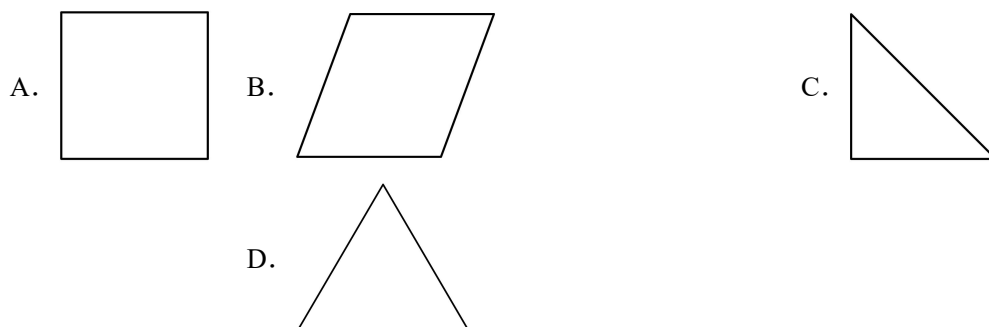
2. (2023 北京中考真题) 如图, 点 A 、 B 、 C 在同一条线上, 点 B 在点 A 、 C 之间, 点 D 、 E 在直线 AC 同侧, $AB < BC$, $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $\triangle EAB \cong \triangle BCD$, 连接 DE , 设 $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$, 给出下面三个结论: ① $a + b < c$; ② $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$; ③ $\sqrt{2}(a + b) > c$;



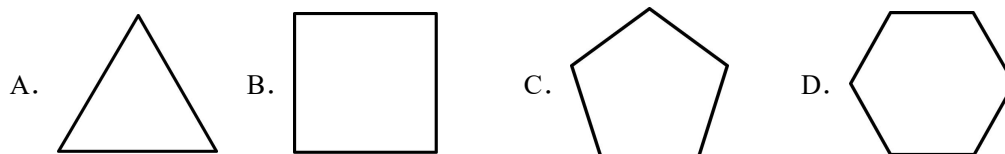
上述结论中, 所有正确结论的序号是 ()

- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

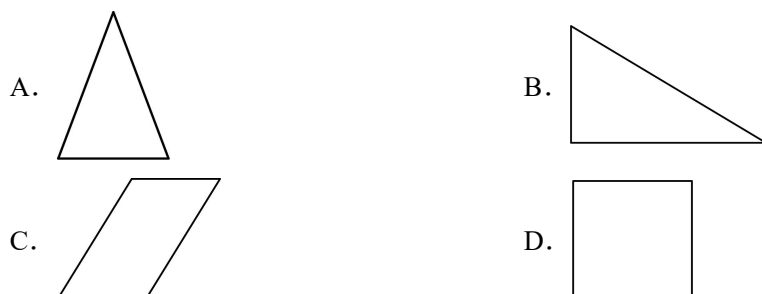
3. (2023 北京中考真题) 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



4. (2021 北京中考真题) 下列多边形中, 内角和最大的是 ()



5. (2020 北京中考真题) 下列图形中, 既是中心对称图形也是轴对称图形的是 ()



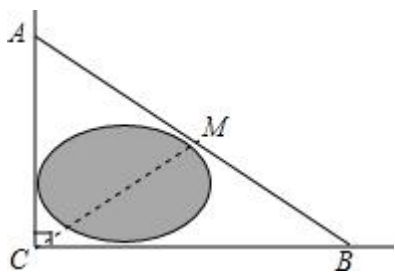
6. (2019 北京中考真题) 正十边形的外角和为 ()

- A. 180° B. 360° C. 720° D. 1440°

7. (2012 北京中考真题) 正十边形的每个外角等于【 】

- A. 18° B. 36° C. 45° D. 60°

8. (2015 北京中考真题) 如图, 公路 AC , BC 互相垂直, 公路 AB 的中点 M 与点 C 被湖隔开, 若测得 AM 的长为 1.2km, 则 M 、 C 两点间的距离为 ()



- A. 0.5km B. 0.6km C. 0.9km D. 1.2km

9. (2018 北京中考真题) 若正多边形的一个外角是 60° , 则该正多边形的内角和为 ()

- A. 360° B. 540° C. 720° D. 900°

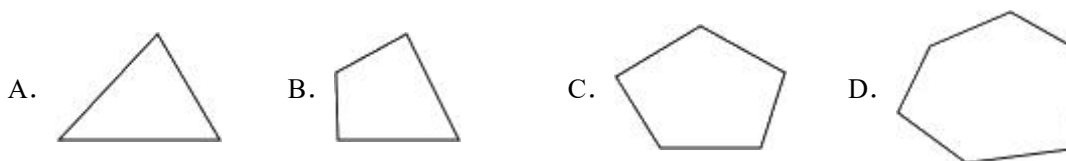
10. (2017 北京中考真题) 若正多边形的一个内角是 150° , 则该正多边形的边数是 ()

- A. 6 B. 12 C. 16 D. 18

11. (2020 北京中考真题) 五边形的外角和等于 ()

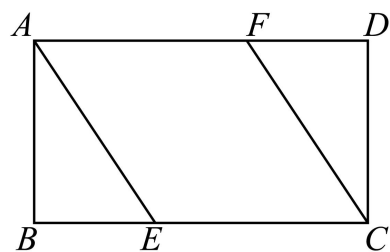
- A. 180° B. 360° C. 540° D. 720°

12. (2016 北京中考真题) 内角和为 540° 的多边形是 ()



二、填空题

13. (2021 北京中考真题) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BC, AD 上, $AF = EC$. 只需添加一个条件即可证明四边形 $AECF$ 是菱形, 这个条件可以是_____ (写出一个即可).



14. (2019 北京中考真题) 在矩形 $ABCD$ 中, M, N, P, Q 分别为边 AB, BC, CD, DA 上的点 (不与端点重合), 对于任意矩形 $ABCD$, 下面四个结论中,

- ①存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;
- ②存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形;
- ③存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形;
- ④至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是_____.

15. (2019 北京中考真题) 把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形, 将这四个直角三角形分别

拼成如图 2，图 3 所示的正方形，则图 1 中菱形的面积为_____.

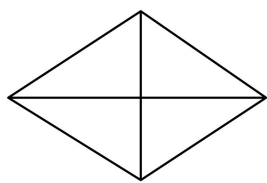


图1

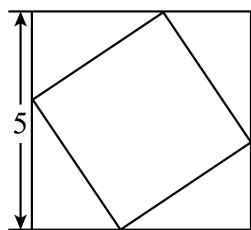


图2

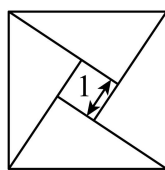
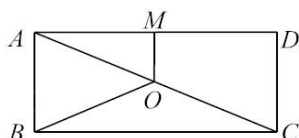
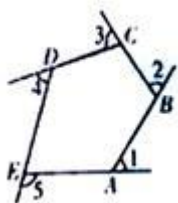


图3

16. (2013 北京中考真题) 如图, O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点, M 是 AD 的中点. 若 $AB=5$, $AD=12$, 则四边形 $ABOM$ 的周长为_____.



17. (2015 北京中考真题) 下图是由射线 AB , BC , CD , DE , EA 组成的平面图形, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ _____.



三、证明题

18. (2022 北京中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 BD , DC , 延长 DC 到点 E , 使得 $CE = DC$.

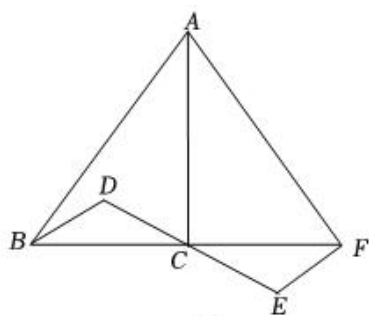


图1

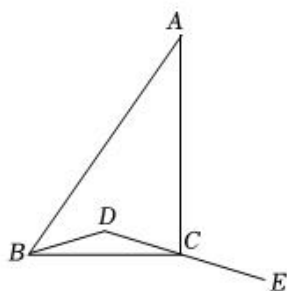
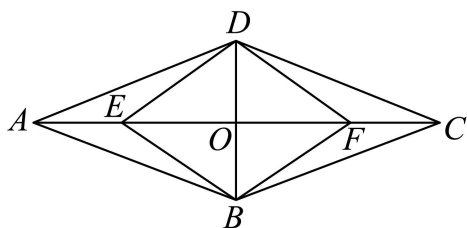


图2

(1) 如图 1, 延长 BC 到点 F , 使得 $CF = BC$, 连接 AF , EF , 若 $AF \perp EF$, 求证: $BD \perp AF$;

(2) 连接 AE , 交 BD 的延长线于点 H , 连接 CH , 依题意补全图 2, 若 $AB^2 = AE^2 + BD^2$, 用等式表示线段 CD 与 CH 的数量关系, 并证明.

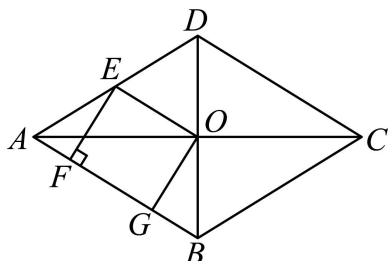
19. (2022 北京中考真题) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AC , BD 交于点 O , 点 E , F 在 AC 上, $AE = CF$.



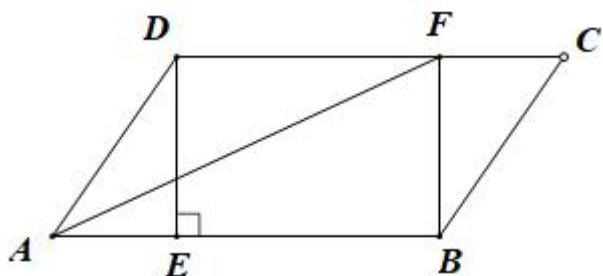
- (1) 求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形；
 (2) 若 $\angle BAC = \angle DAC$ ，求证：四边形 $EBFD$ 是菱形。

20. (2020 北京中考真题) 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， E 是 AD 的中点，点 F ， G 在 AB 上， $EF \perp AB$ ， $OG \parallel EF$ 。

- (1) 求证：四边形 $OEFG$ 是矩形；
 (2) 若 $AD=10$ ， $EF=4$ ，求 OE 和 BG 的长。

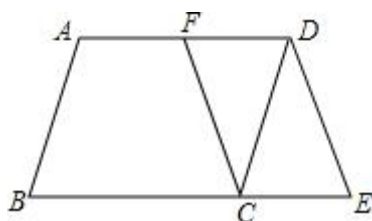


21. (2015 北京中考真题) 在 $\square ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，点 F 在边 CD 上， $DF=BE$ ，连接 AF ， BF 。



- (1) 求证：四边形 $BFDE$ 是矩形；
 (2) 若 $CF=3$ ， $BF=4$ ， $DF=5$ ，求证： AF 平分 $\angle DAB$ 。

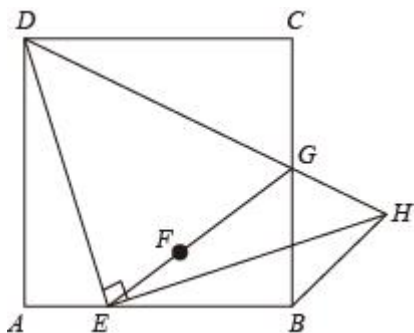
22. (2013 北京中考真题) 如图，在 $\square ABCD$ 中， F 是 AD 的中点，延长 BC 到点 E ，使 $CE = \frac{1}{2}BC$ ，连接 DE ， CF 。



- (1) 求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；
 (2) 若 $AB=4$ ， $AD=6$ ， $\angle B=60^\circ$ ，求 DE 的长。

23. (2018 北京中考真题) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 上的一动点（不与点 A 、 B 重合），连接 DE ，点 A 关于直线 DE 的对称点为 F ，连接 EF 并延长交 BC 于点 G ，连接 DG ，过点 E 作 $EH \perp DE$ 交 DG 的延长线于点 H ，连接 BH 。

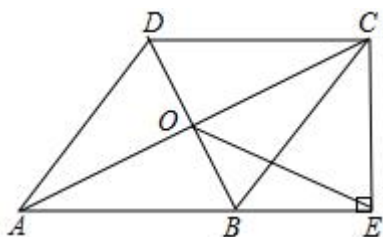
- (1) 求证： $GF=GC$ ；
 (2) 用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系，并证明。



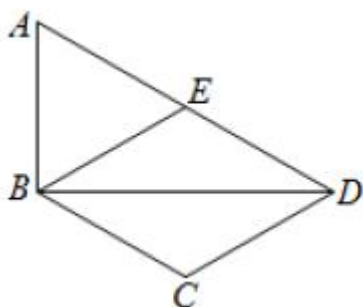
24. (2018 北京中考真题) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = AD$, 对角线 AC , BD 交于点 O , AC 平分 $\angle BAD$, 过点 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E , 连接 OE .

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形;

(2) 若 $AB = \sqrt{5}$, $BD = 2$, 求 OE 的长.



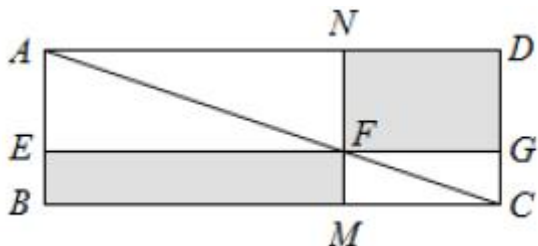
25. (2017 北京中考真题) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, BD 为一条对角线, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $\angle ABD = 90^\circ$, E 为 AD 的中点, 连接 BE .



(1) 求证: 四边形 $BCDE$ 为菱形;

(2) 连接 AC , 若 AC 平分 $\angle BAD$, $BC = 1$, 求 AC 的长.

26. (2017 北京中考真题) 数学家吴文俊院士非常重视古代数学家贾宪提出的“从长方形对角线上任一点作两条分别平行于两邻边的直线, 则所容两长方形面积相等 (如图所示)”这一推论, 他从这一推论出发, 利用“出入相补”原理复原了《海岛算经》九题古证.,



(以上材料来源于《古证复原的原理》、《吴文俊与中国数学》和《古代世界数学泰斗刘徽》)

请根据上图完成这个推论的证明过程.

证明: $S_{\text{矩形NFGD}} = S_{\triangle ADC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FGC})$, $S_{\text{矩形EBMF}} = S_{\triangle ABC} - (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}})$.

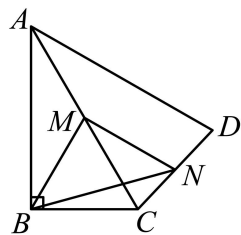
易知, $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$, $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

可得 $S_{\text{矩形NFGD}} = S_{\text{矩形EBMF}}$.

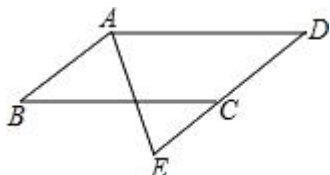
27. (2016 北京中考真题) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = AD$, M , N 分别为 AC , CD 的中点, 连接 BM , MN , BN .

(1) 求证: $BM = MN$;

(2) $\angle BAD = 60^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, $AC = 2$, 求 BN 的长.



28. (2016 北京中考真题) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, AE 平分 $\angle BAD$, 交 DC 的延长线于点 E . 求证: $DA = DE$.



29. (2011 北京中考真题) 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAD$ 的平分线交直线 BC 于点 E , 交直线 DC 于点 F

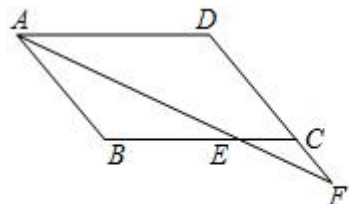


图 1

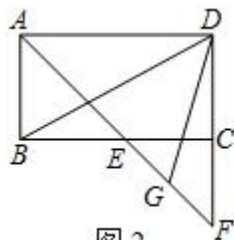


图 2

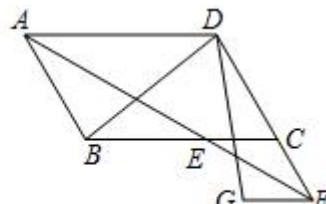


图 3

(1) 在图 1 中证明 $CE = CF$;

(2) 若 $\angle ABC = 90^\circ$, G 是 EF 的中点 (如图 2), 直接写出 $\angle BDG$ 的度数;

(3) 若 $\angle ABC = 120^\circ$, $FG \parallel CE$, $FG = CE$, 分别连接 DB 、 DG (如图 3), 求 $\angle BDG$ 的度数.

四、作图题

30. (2020 北京中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC > BC$, D 是 AB 的中点. E 为直线上一动点, 连接 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$, 交直线 BC 于点 F , 连接 EF .

(1) 如图 1, 当 E 是线段 AC 的中点时, 设 $AE = a$, $BF = b$, 求 EF 的长 (用含 a, b 的式子表示);

(2) 当点 E 在线段 CA 的延长线上时, 依题意补全图 2, 用等式表示线段 AE , EF , BF 之间的数量关系, 并证明.

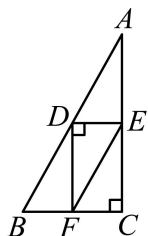


图1

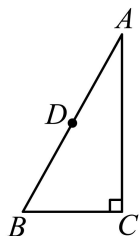


图2

31. (2018 北京中考真题) 下面是小东设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程.

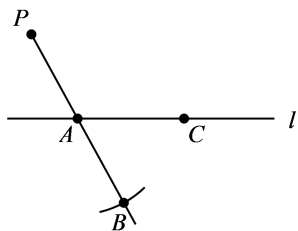
已知: 直线及直线外一点 P .

P .

_____ l

求作: PQ , 使得 $PQ \parallel l$.

作法: 如图,



①在直线上取一点 A , 作射线 PA , 以点 A 为圆心, AP 长为半径画弧, 交 PA 的延长线于点 B ;

②在直线上取一点 C (不与点 A 重合), 作射线 BC , 以点 C 为圆心, CB 长为半径画弧, 交 BC 的延长线于点 Q ;

③作直线 PQ .

所以直线 PQ 就是所求作的直线.

根据小东设计的尺规作图过程,

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形; (保留作图痕迹)

(2) 完成下面的证明.

证明: $\because AB = \underline{\hspace{2cm}}, CB = \underline{\hspace{2cm}},$

$\therefore PQ \parallel l$ ($\underline{\hspace{2cm}}$) (填推理的依据).

32. (2011 北京中考真题) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 我把由两条射线 AE , BF 和以 AB 为直径的半圆所组成的图形叫作图形 C (注: 不含 AB 线段). 已知 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $AE \parallel BF$, 且半圆与 y 轴的交点 D 在射线 AE 的反向延长线上.

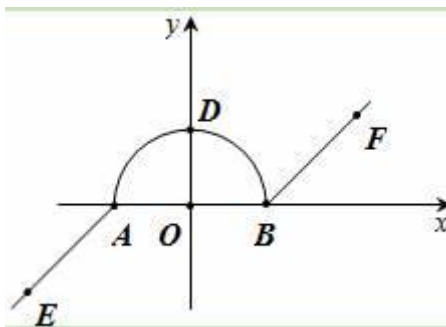
(1) 求两条射线 AE , BF 所在直线的距离;

(2) 当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有一个公共点时, 写出 b 的取值范围;

当一次函数 $y=x+b$ 的图象与图形 C 恰好只有两个公共点时, 写出 b 的取值范围;

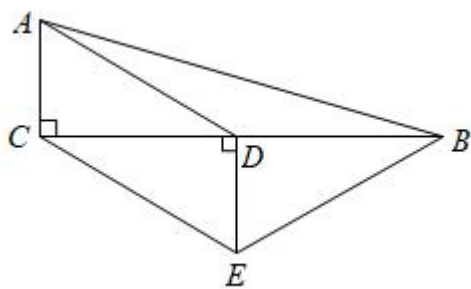
(3) 已知 $\square AMPQ$ (四个顶点 A, M, P, Q 按顺时针方向排列) 的各顶点都在图形 C 上, 且都不在两条

射线上，求点 M 的横坐标 x 的取值范围.



五、问答题

33. (2011 北京中考真题) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，D 是 BC 的中点， $DE \perp BC$ ， $CE \parallel AD$ ，若 $AC=2$ ， $CE=4$ ，求四边形 ACEB 的周长.



参考答案

1. C

【分析】根据任何多边形的外角和都为 360° 即可解答.

【详解】解：因为多边形的外角和为 360° ，所以正十二边形的外角和为： 360° .

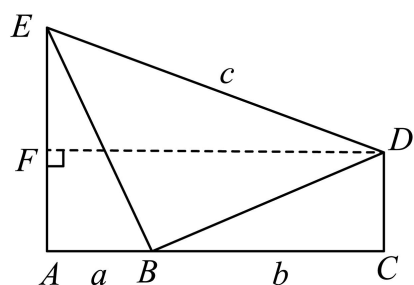
故选：C.

【点睛】本题主要考查了多边形的外角和，掌握任何多边形的外角和都为 360° 是解答本题的关键.

2. D

【分析】如图，过 D 作 $DF \perp AE$ 于 F ，则四边形 $ACDF$ 是矩形，则 $DF = AC = a + b$ ，由 $DF < DE$ ，可得 $a + b < c$ ，进而可判断①的正误；由 $\triangle EAB \cong \triangle BCD$ ，可得 $BE = BD$ ， $CD = AB = a$ ， $AE = BC = b$ ， $\angle ABE = \angle CDB$ ，则 $\angle EBD = 90^\circ$ ， $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形，由勾股定理得， $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，由 $AB + AE > BE$ ，可得 $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$ ，进而可判断②的正误；由勾股定理得 $DE^2 = BD^2 + BE^2$ ，即 $c^2 = 2(a^2 + b^2)$ ，则 $c = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{2}(a + b)$ ，进而可判断③的正误.

【详解】解：如图，过 D 作 $DF \perp AE$ 于 F ，则四边形 $ACDF$ 是矩形，



$\therefore DF = AC = a + b$,

$\because DF < DE$,

$\therefore a + b < c$ ，①正确，故符合要求；

$\because \triangle EAB \cong \triangle BCD$,

$\therefore BE = BD$ ， $CD = AB = a$ ， $AE = BC = b$ ， $\angle ABE = \angle CDB$ ，

$\because \angle CBD + \angle CDB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBD + \angle ABE = 90^\circ$ ， $\angle EBD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰直角三角形，

由勾股定理得， $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，

$\because AB + AE > BE$ ，

$\therefore a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$ ，②正确，故符合要求；

由勾股定理得 $DE^2 = BD^2 + BE^2$ ，即 $c^2 = 2(a^2 + b^2)$ ，

$\therefore c = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{2}(a + b)$ ，③正确，故符合要求；

故选：D.

【点睛】本题考查了矩形的判定与性质，全等三角形的性质，勾股定理，等腰三角形的判定，不等式的性质，三角形的三边关系等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

3. A

【分析】根据轴对称图形，中心对称图形的定义进行判断即可．

【详解】解：A 既是轴对称图形又是中心对称图形，故符合要求；

B 不是轴对称图形，是中心对称图形，故不符合要求；

C 是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合要求；

D 是轴对称图形，不是中心对称图形，故不符合要求；

故选：A．

【点睛】本题考查了轴对称图形，中心对称图形，解题的关键在于熟练掌握：在平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形；在平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形叫做轴对称图形．

4. D

【分析】根据多边形内角和公式可直接进行排除选项．

【详解】解：A、是一个三角形，其内角和为 180° ；

B、是一个四边形，其内角和为 360° ；

C、是一个五边形，其内角和为 540° ；

D、是一个六边形，其内角和为 720° ；

$\therefore$ 内角和最大的是六边形；

故选 D．

【点睛】本题主要考查多边形内角和，熟练掌握多边形内角和公式是解题的关键．

5. D

【分析】根据中心对称图形以及轴对称图形的定义即可作出判断．

【详解】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故选项错误；

B、不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故选项错误；

C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项错误；

D、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故选项正确．

故选：D．

【点睛】本题主要考查了中心对称图形和轴对称图形的定义，正确理解定义是关键．

6. B

【分析】根据多边形的外角和定理进行选择．

【详解】解：因为任意多边形的外角和都等于 360° ，

所以正十边形的外角和等于 360° ，.

故选 B．

【点睛】本题考查了多边形外角和定理，关键是熟记：多边形的外角和等于 360° 度．

7. B

【详解】多边形外角性质. 根据外角和等于 360^0 的性质, 得正十边形的每个外角等于 $360^0 \div 10 = 36^0$. 故选 B.

8. D

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求得.

【详解】解: 根据题意可得, $AM=1.2$,

$\because M$ 为中点,

$\therefore AB=2AM=2.4$,

$\therefore CM = \frac{1}{2} AB = 1.2$

故选: D.

【点睛】题目主要考查直角三角形斜边上的中线的性质, 理解题意, 熟练掌握运用这个性质是解题关键.

9. C

【分析】根据正多边形的外角度数求出多边形的边数, 根据多边形的内角和公式即可求出多边形的内角和.

【详解】由题意, 正多边形的边数为 $n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$,

其内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

故选 C.

【点睛】考查多边形的内角和与外角和公式, 熟练掌握公式是解题的关键.

10. B

【详解】设多边形的边数为 n , 则有 $(n-2) \times 180^\circ = n \times 150^\circ$, 解得: $n=12$,

故选 B.

11. B

【分析】根据多边形的外角和等于 360° 解答.

【详解】解: 五边形的外角和是 360° .

故选 B.

【点睛】本题考查了多边形的外角和定理, 多边形的外角和与边数无关, 任意多边形的外角和都是 360° .

12. C

【详解】设它是 n 边形,

根据题意得, $(n-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$,

解得: $n=5$.

故选: C.

13. $AF = AE$ (答案不唯一)

【分析】由题意易得四边形 $AECF$ 是平行四边形, 然后根据菱形的判定定理可进行求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore AF = EC$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

若要添加一个条件使其为菱形，则可添加 $AF = AE$ 或 $AE = CE$ 或 $CE = CF$ 或 $AF = CF$ ，理由：一组邻边相等的平行四边形是菱形；

故答案为 $AF = AE$ （答案不唯一）。

【点睛】本题主要考查菱形的判定定理、矩形的性质及平行四边形的判定，熟练掌握菱形的判定定理、矩形的性质及平行四边形的判定是解题的关键。

14. ①②③

【分析】根据矩形的判定和性质，菱形的判定，正方形的判定，平行四边形的判定定理即可得到结论。

【详解】解：①如图，∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，连接 AC ， BD 交于 O ，

∴ $OA = OB = OC = OD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，

∴ $\angle OBM = \angle ODP$ ， $\angle OAQ = \angle OCN$ ，

过点 O 的直线 MP 和 QN ，分别交 AB ， BC ， CD ， AD 于 M ， N ， P ， Q ，

∴ $\angle BOM = \angle DOP$ ， $\angle AOQ = \angle CON$ ，

所以 $\triangle BOM \cong \triangle DOP$ (ASA)， $\triangle AOQ \cong \triangle CON$ (ASA)，

所以 $OM = OP$ ， $OQ = ON$ ，

则四边形 $MNPQ$ 是平行四边形，

故存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形；故正确；

②如图，当 $PM = QN$ 时，四边形 $MNPQ$ 是矩形，故存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形；故正确；

③如图，当 $PM \perp QN$ 时，存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形；故正确；

④当四边形 $MNPQ$ 是正方形时， $MQ = PQ$ ，

则 $\triangle AMQ \cong \triangle DQP$ ，

∴ $AM = QD$ ， $AQ = PD$ ，

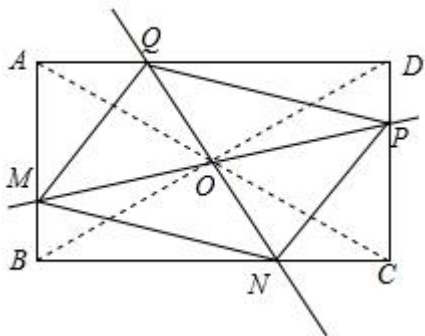
∵ $PD = BM$ ，

∴ $AB = AD$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

当四边形 $ABCD$ 为正方形时，四边形 $MNPQ$ 是正方形，故错误；

故正确结论的序号是①②③。



故答案为：①②③。

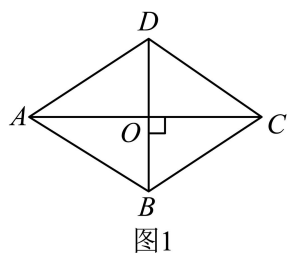
【点睛】本题考查了矩形的判定和性质，菱形的判定，正方形的判定，平行四边形的判定定理，熟记各定理是解题的关键.

15. 12

【分析】由菱形的性质得出 $OA=OC$, $OB=OD$, $AC \perp BD$, 设 $OA=x$, $OB=y$, 由题意得: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$, 解得:

$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, 得出 $AC=2OA=6$, $BD=2OB=4$, 即可得出菱形的面积.

【详解】解: 如图 1 所示:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OA=OC$, $OB=OD$, $AC \perp BD$,

设 $OA=x$, $OB=y$,

由题意得: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$,

$\therefore AC=2OA=6$, $BD=2OB=4$,

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$;

故答案为 12.

【点睛】本题考查了菱形的性质、正方形的性质、二元一次方程组的应用; 熟练掌握正方形和菱形的性质, 由题意列出方程组是解题的关键.

16. 20

【分析】先由 $AB=5$, $AD=12$ 得到 $AC=13$, 然后结合矩形的性质得到 $OB=6.5$, 再结合点 O 和点 M 分别是 AC 和 AD 的中点得到 OM 和 AM 的长, 最后得到四边形 $ABOM$ 的周长.

【详解】解: $\because AB=5$,

$\therefore CD=5$,

$\because AD=12$, $\angle D=90^\circ$,

$\therefore AC=13$,

$\because$ 点 O 和点 M 分别是 AC 和 AD 的中点,

$\therefore OB=6.5$, $AM=\frac{1}{2}AD=6$, OM 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$\therefore OM=\frac{1}{2}CD=2.5$,

$\therefore C_{\text{四边形}ABOM} = AB + BO + OM + MA = 5 + 6.5 + 2.5 + 6 = 20$.

故答案为：20.

【点睛】本题考查了矩形的性质、三角形的中位线定理，解题的关键是熟知矩形的性质.

17. 360°

【详解】试题分析：根据多边形的外角和为 360° ，可知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$.

考点：多边形的外角和

18. (1)见解析

(2) $CD = CH$ ；证明见解析

【分析】(1)先利用已知条件证明 $\triangle FCE \cong \triangle BCD$ (SAS)，得出 $\angle CFE = \angle CBD$ ，推出 $EF \parallel BD$ ，再由 $AF \perp EF$ 即可证明 $BD \perp AF$ ；

(2)延长 BC 到点 M ，使 $CM = CB$ ，连接 EM ， AM ，先证 $\triangle MEC \cong \triangle BDC$ (SAS)，推出 $ME = BD$ ，通过等量代换得到 $AM^2 = AE^2 + ME^2$ ，利用平行线的性质得出 $\angle BHE = \angle AEM = 90^\circ$ ，利用直角三角形斜边中线等于斜边一半即可得到 $CD = CH$.

【详解】(1)证明：在 $\triangle FCE$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle FCE = \angle BCD, \\ CF = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle BCD (\text{SAS}),$$

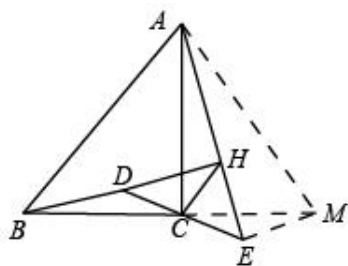
$$\therefore \angle CFE = \angle CBD,$$

$$\therefore EF \parallel BD,$$

$$\because AF \perp EF,$$

$$\therefore BD \perp AF.$$

(2)解：补全后的图形如图所示， $CD = CH$ ，证明如下：



延长 BC 到点 M ，使 $CM = CB$ ，连接 EM ， AM ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, CM = CB,$$

$$\therefore AC \text{ 垂直平分 } BM,$$

$$\therefore AB = AM,$$

在 $\triangle MEC$ 和 $\triangle BDC$ 中，

$$\begin{cases} CM = CB \\ \angle MCE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle MEC \cong \triangle BDC (\text{SAS}), \\
&\therefore ME = BD, \angle CME = \angle CBD, \\
&\because AB^2 = AE^2 + BD^2, \\
&\therefore AM^2 = AE^2 + ME^2, \\
&\therefore \angle AEM = 90^\circ, \\
&\because \angle CME = \angle CBD, \\
&\therefore BH \parallel EM, \\
&\therefore \angle BHE = \angle AEM = 90^\circ, \text{ 即 } \angle DHE = 90^\circ, \\
&\because CE = CD = \frac{1}{2}DE, \\
&\therefore CH = \frac{1}{2}DE, \\
&\therefore CD = CH.
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质，垂直平分线的性质，平行线的判定与性质，勾股定理的逆用，直角三角形斜边中线的性质等，第二问有一定难度，正确作辅助线，证明 $\angle DHE = 90^\circ$ 是解题的关键.

19. (1)见解析

(2)见解析

【分析】(1)先根据四边形 $ABCD$ 为平行四边形，得出 $AO = CO$ ， $BO = DO$ ，再根据 $AE = CF$ ，得出 $EO = FO$ ，即可证明结论；

(2)先证明 $\angle DCA = \angle DAC$ ，得出 $DA = DC$ ，证明四边形 $ABCD$ 为菱形，得出 $AC \perp BD$ ，即可证明结论.

【详解】(1)证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AO = CO, BO = DO,$$

$$\because AE = CF,$$

$$\therefore AO - AE = CO - CF,$$

$$\text{即 } EO = FO,$$

$$\therefore \text{四边形 } EBF D \text{ 是平行四边形.}$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle BAC,$$

$$\because \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle DAC,$$

$$\therefore DA = DC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 为菱形,}$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\text{即 } EF \perp BD,$$

$$\because \text{四边形 } EBF D \text{ 是平行四边形,}$$

∴ 四边形 $EBFD$ 是菱形.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，菱形的判定和性质，平行线的性质，熟练掌握菱形和平行四边形的判定方法，是解题的关键.

20. (1)见解析; (2) $OE=5$, $BG=2$.

【分析】(1)先证明 EO 是 $\triangle DAB$ 的中位线，再结合已知条件 $OG \parallel EF$ ，得到四边形 $OEFG$ 是平行四边形，再由条件 $EF \perp AB$ ，得到四边形 $OEFG$ 是矩形；

(2)先求出 $AE=5$ ，由勾股定理进而得到 $AF=3$ ，再由中位线定理得到 $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AD=5$ ，得到 $FG=5$ ，最后 $BG=AB-AF-FG=2$.

【详解】解：(1)证明：∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ 点 O 为 BD 的中点，

∵ 点 E 为 AD 中点，

∴ OE 为 $\triangle ABD$ 的中位线，

∴ $OE \parallel FG$ ，

∵ $OG \parallel EF$ ，∴ 四边形 $OEFG$ 为平行四边形

∵ $EF \perp AB$ ，∴ 平行四边形 $OEFG$ 为矩形.

(2)∵ 点 E 为 AD 的中点， $AD=10$ ，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = 5$$

∵ $\angle EFA=90^\circ$ ， $EF=4$ ，

∴ 在 $Rt\triangle AEF$ 中， $AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $AB=AD=10$ ，

∴ $OE = \frac{1}{2}AB = 5$ ，

∵ 四边形 $OEFG$ 为矩形，

∴ $FG=OE=5$ ，

∴ $BG=AB-AF-FG=10-3-5=2$.

故答案为： $OE=5$ ， $BG=2$.

【点睛】本题考查了矩形的性质和判定，菱形的性质、勾股定理等知识点，解题的关键是掌握特殊四边形的性质和判定属于中考常考题型，需要重点掌握.

21. (1) 见解析 (2) 见解析

【分析】(1) 根据平行四边形的性质，可得 AB 与 CD 的关系，根据平行四边形的判定，可得 $BFDE$ 是平行四边形，再根据矩形的判定，即可证明；

(2) 根据平行线的性质，可得 $\angle DFA = \angle FAB$ ，根据等腰三角形的判定与性质，可得 $\angle DAF = \angle DFA$ ，根据角平分线的判定，即可证明.

【详解】(1) 证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD.$$

$$\because BE \parallel DF, BE=DF,$$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DEB=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是矩形;

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle DFA=\angle FAB.$$

在 $Rt\triangle BCF$ 中, 由勾股定理, 得

$$BC=\sqrt{FC^2+FB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

$$\therefore AD=BC=DF=5,$$

$$\therefore \angle DAF=\angle DFA,$$

$$\therefore \angle DAF=\angle FAB,$$

即 AF 平分 $\angle DAB$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质, 矩形的判定, 等腰三角形的判定与性质, 利用等腰三角形的判定与性质得出 $\angle DAF=\angle DFA$ 是解题关键.

22. (1) 见解析 (2) $\sqrt{13}$

【分析】(1) 由“平行四边形的对边平行且相等”的性质推知 $AD \parallel BC$, 且 $AD=BC$; 然后根据中点的定义、结合已知条件推知四边形 $CEDF$ 的对边平行且相等 ($DF=CE$, 且 $DF \parallel CE$), 即四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 如图, 过点 D 作 $DH \perp BE$ 于点 H , 构造含 30° 角的直角 $\triangle DCH$ 和直角 $\triangle DHE$. 通过解直角 $\triangle DCH$ 和在直角 $\triangle DHE$ 中运用勾股定理来求线段 ED 的长度.

【详解】(1) 证明: 在 $\square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $AD=BC$

$\because F$ 是 AD 的中点

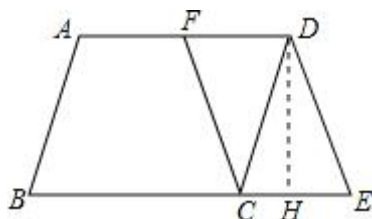
$$\therefore DF=\frac{1}{2}AD$$

$$\text{又} \because CE=\frac{1}{2}BC$$

$$\therefore DF=CE, \text{ 且 } DF \parallel CE$$

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 如图, 过点 D 作 $DH \perp BE$ 于点 H .



在 $\square ABCD$ 中, $\because \angle B=60^\circ$,

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ.$$

$$\because AB = 4,$$

$$\therefore CD = AB = 4,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2} CD = 2, DH = 2\sqrt{3}.$$

在 $\square CEDF$ 中, $CE = DF = \frac{1}{2} AD = 3$, 则 $EH = 1$.

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle DHE \text{ 中, 根据勾股定理知 } DE = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{13}.$$

23. (1) 证明见解析; (2) $BH = \sqrt{2} AE$, 理由见解析

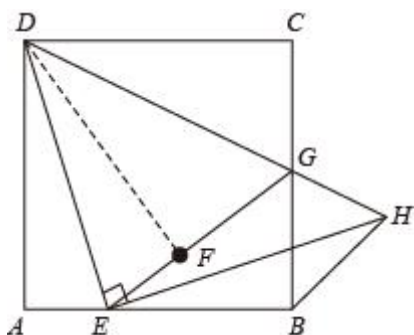
【分析】(1) 连接 DF . 根据对称的性质可得 $AD = FD$. $AE = FE$. 证明 $\triangle ADE \cong \triangle FDE$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle DAE = \angle DFE$. 进而证明 $Rt\triangle DCG \cong Rt\triangle DFG$, 即可证明;

(2) 在 AD 上取点 M 使得 $AM = AE$, 连接 ME . 证明 $\triangle DME \cong \triangle EBH$, 根据等腰直角三角形的性质即可得到线段 BH 与 AE 的数量关系.

【详解】(1) 证明: 连接 DF .

$\because A, F$ 关于 DE 对称.

$$\therefore AD = FD. AE = FE.$$



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FDE$ 中

$$\begin{cases} AD = FD \\ AE = FE, \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FDE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DFE.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle C = 90^\circ. AD = CD,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFG = 180^\circ - \angle DFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFG = \angle C,$$

$$\because AD = DF, AD = CD,$$

$$\therefore DF = CD.$$

在 $Rt\triangle DCG$ 和 $Rt\triangle DFG$ 中

$$\begin{cases} DC = DF \\ DG = DG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DCG \cong \text{Rt}\triangle DFG,$$

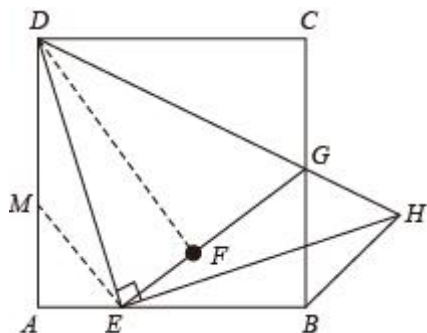
$$\therefore CG = FG.$$

$$(2) BH = \sqrt{2}AE.$$

证明：在 AD 上取点 M 使得 $AM = AE$ ，连接 ME 。

$\because$ 四这形 $ABCD$ 是正方形。

$$\therefore AD = AB, \angle A = \angle ADC = 90^\circ.$$



$$\because \triangle DAE \cong \triangle DFE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle FDE.$$

同理： $\angle CDG = \angle FDG$ ，

$$\therefore \angle EDG = \angle EDF + \angle GDF = \frac{1}{2} \angle ADF + \frac{1}{2} \angle CDF = \frac{1}{2} \angle ADC = 45^\circ$$

$$\because DE \perp EH,$$

$$\therefore \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHD = 180^\circ - \angle DEH - \angle EDH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EHD = \angle EDH.$$

$$\therefore DE = EH.$$

$$\because \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AED = 90^\circ.$$

$$\because \angle DEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BEH.$$

$$\because AD = AB, AM = AE,$$

$$\therefore DM = EB.$$

$$\text{在 } \triangle DME \text{ 和 } \triangle EBH \text{ 中 } \begin{cases} DM = EB \\ \angle MDE = \angle BEH, \\ DE = EH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DME \cong \triangle EBH,$$

$$\therefore ME = BH,$$

在 $Rt\triangle AME$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AE = AM$.

$$\therefore ME = \sqrt{AE^2 + AM^2} = \sqrt{2}AE,$$

$$\therefore BH = \sqrt{2}AE.$$

【点睛】本题是四边形的综合题,考查了正方形的性质,轴对称的性质,全等三角形的性质与判定,勾股定理,等腰直角三角形的性质与判定等知识,此题综合性较强,难度较大,注意掌握辅助线的作法,注意数形结合思想的应用.

24. (1) 证明见解析; (2) $OE=2$.

【分析】(1) 根据一组对边相等的平行四边形是菱形进行判定即可.

(2) 根据菱形的性质和勾股定理求出 $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 2$, 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半即可求解.

【详解】(1) 证明: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle CAB = \angle ACD,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACD,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\text{又} \because AD = AB,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形},$$

$$\text{又} \because AB = AD,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形}.$$

(2) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, 对角线 AC 、 BD 交于点 O ,

$$\therefore AC \perp BD, \quad OA = OC = \frac{1}{2}AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2}BD = 1,$$

在 $Rt\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 2,$$

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle AEC$ 中, $\angle AEC = 90^\circ$, O 为 AC 中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AC = OA = 2.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的性质和判定,菱形的判定与性质,直角三角形的性质,勾股定理等,熟练掌握菱形的判定方法以及直角三角形斜边的中线等于斜边的一半是解题的关键.

25. (1)证明见解析.

(2) $\sqrt{3}$.

【分析】(1) 先证明四边形 $BCDE$ 是平行四边形, 再证明一组邻边相等即可;

(2) 连接 AC , 根据平行线的性质及等角对等边证明 $AB=1$, $AD=2$, 可知 $\angle ADB=30^\circ$, 再根据菱形的性质即可得出 $\triangle ACD$ 是含 30° 的特殊三角形, 最后根据勾股定理即可求 AC 的长.

【详解】(1) $\because AD=2BC$, E 为 AD 的中点,

$$\therefore DE=BC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

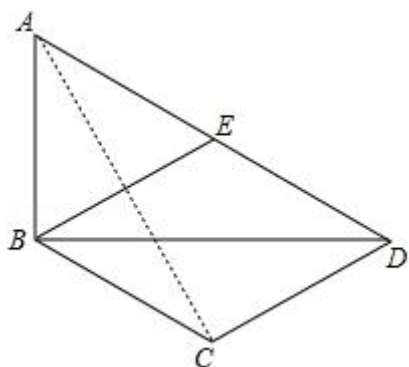
$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形,

$$\because \angle ABD=90^\circ, AE=DE,$$

$$\therefore BE=DE,$$

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是菱形.

(2) 解: 连接 AC .



$$\because AD \parallel BC, AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \angle BCA,$$

$$\therefore AB=BC=1,$$

$$\therefore AD=2BC=2,$$

$$\therefore \angle ADB=30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC=30^\circ,$$

$\because$ 四边形 $BCDE$ 是菱形

$$\therefore \angle ADC=2\angle ADB=60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD=90^\circ$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\because AD=2$,

$$\therefore CD=1,$$

$$\therefore AC=\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了菱形的性质与判定, 勾股定理等, 解题的关键是连接 AC 构造 $Rt\triangle ACD$.

26. $S_{\triangle AEF}$, $S_{\triangle CFM}$; $S_{\triangle ANF}$, $S_{\triangle AEF}$; $S_{\triangle FGC}$, $S_{\triangle CFMF}$.

【详解】试题分析: 由矩形的对角线的性质, 对角线把矩形分成两个面积相等的三角形计算即可.

试题解析：由矩形对角线把矩形分成两个面积相等的两部分可得：

$$S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\triangle ADC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FGC}), S_{\text{矩形}EBMF} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AEF} + S_{\triangle FMC}),$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ANF} = S_{\triangle AEF}, S_{\triangle FGC} = S_{\triangle FMC}, \therefore S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩形}EBMF}.$$

27. (1) 证明见解析；(2) $\sqrt{2}$

【分析】(1) 在 $\triangle CAD$ 中，由中位线定理得到 $MN \parallel AD$ ，且 $MN = \frac{1}{2} AD$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，因为 M 是 AC 的中点，故 $BM = \frac{1}{2} AC$ ，即可得到结论；

(2) 由 $\angle BAD = 60^\circ$ 且 AC 平分 $\angle BAD$ ，得到 $\angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$ ，由 (1) 知， $BM = \frac{1}{2} AC = AM = MC$ ，得到 $\angle BMC = 60^\circ$ 。由平行线性得到 $\angle NMC = \angle DAC = 30^\circ$ ，故 $\angle BMN = 90^\circ$ ，得到 $BN^2 = BM^2 + MN^2$ ，再由 $MN = BM = 1$ ，得到 BN 的长。

【详解】(1) 在 $\triangle CAD$ 中， $\because M$ 、 N 分别是 AC 、 CD 的中点，

$$\therefore MN \parallel AD, \text{ 且 } MN = \frac{1}{2} AD,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because M$ 是 AC 的中点，

$$\therefore BM = \frac{1}{2} AC,$$

$$\text{又 } \because AC = AD,$$

$$\therefore MN = BM;$$

(2) $\because \angle BAD = 60^\circ$ 且 AC 平分 $\angle BAD$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\text{由 (1) 知, } BM = \frac{1}{2} AC = AM = MC,$$

$$\therefore \angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\angle BAM = 60^\circ.$$

$$\because MN \parallel AD,$$

$$\therefore \angle NMC = \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BMN = \angle BMC + \angle NMC = 90^\circ,$$

$$\therefore BN^2 = BM^2 + MN^2,$$

$$\text{而由 (1) 知, } MN = BM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore BN = \sqrt{2}.$$

28. 证明见解析.

【分析】由平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$ ，得出内错角相等 $\angle E = \angle BAE$ ，再由角平分线证出 $\angle E = \angle DAE$ ，即可得出结论。

【详解】证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, \therefore \angle E = \angle BAE,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAD, \therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle E = \angle DAE,$$

$\therefore DA=DE$.

29. (1)见解析; (2) 45° ; (3)见解析

【分析】(1) 根据 AF 平分 $\angle BAD$, 可得 $\angle BAF=\angle DAF$, 利用四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 求证 $\angle CEF=\angle F$ 即可;

(2) 根据 $\angle ABC=90^\circ$, G 是 EF 的中点可直接求得;

(3) 分别连接 GB 、 GC , 求证四边形 $CEGF$ 是平行四边形, 再求证 $\triangle ECG$ 是等边三角形, 由 $AD \parallel BC$ 及 AF 平分 $\angle BAD$ 可得 $\angle BAE=\angle AEB$, 求证 $\triangle BEG \cong \triangle DCG$, 然后即可求得答案.

【详解】(1) 证明: 如图 1,

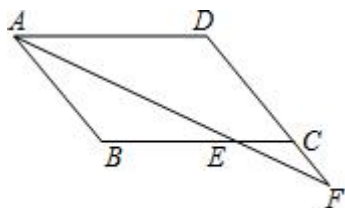


图 1

$\because AF$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAF=\angle DAF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DAF=\angle CEF, \angle BAF=\angle F$,

$\therefore \angle CEF=\angle F$.

$\therefore CE=CF$.

(2) 解: 连接 GC 、 BG ,

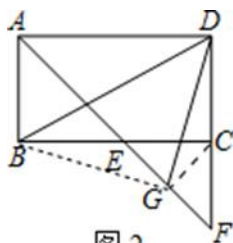


图 2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ABC=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\because AF$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle DAF=\angle BAF=45^\circ$,

$\because \angle DCB=90^\circ, DF \parallel AB$,

$\therefore \angle DFA=45^\circ, \angle ECF=90^\circ$

$\therefore \triangle ECF$ 为等腰直角三角形,

$\because G$ 为 EF 中点,

$\therefore EG=CG=FG, CG \perp EF$,

$\because \triangle ABE$ 为等腰直角三角形, $AB=DC$,

$$\therefore BE=DC,$$

$$\because \angle CEF=\angle GCF=45^{\circ},$$

$$\therefore \angle BEG=\angle DCG=135^{\circ}$$

在 $\triangle BEG$ 与 $\triangle DCG$ 中,

$$\because \begin{cases} EG=CG \\ \angle BEG=\angle DCG, \\ BE=DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEG \cong \triangle DCG,$$

$$\therefore BG=DG,$$

$$\because CG \perp EF,$$

$$\therefore \angle DGC+\angle DGA=90^{\circ},$$

$$\text{又} \because \angle DGC=\angle BGA,$$

$$\therefore \angle BGA+\angle DGA=90^{\circ},$$

$$\therefore \triangle DGB \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore \angle BDG=45^{\circ}.$$

(3) 解: 延长 AB 、 FG 交于 H , 连接 HD .

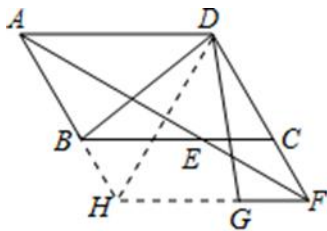


图 3

$$\because AD \parallel GF, AB \parallel DF,$$

$$\therefore \text{四边形 } AHFD \text{ 为平行四边形}$$

$$\because \angle ABC=120^{\circ}, AF \text{ 平分 } \angle BAD$$

$$\therefore \angle DAF=30^{\circ}, \angle ADC=120^{\circ}, \angle DFA=30^{\circ}$$

$$\therefore \triangle DAF \text{ 为等腰三角形}$$

$$\therefore AD=DF,$$

$$\therefore CE=CF,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } AHFD \text{ 为菱形}$$

$$\therefore \triangle ADH, \triangle DHF \text{ 为全等的等边三角形}$$

$$\therefore DH=DF, \angle BHD=\angle GFD=60^{\circ}$$

$$\because FG=CE, CE=CF, CF=BH,$$

$$\therefore BH=GF$$

在 $\triangle BHD$ 与 $\triangle GFD$ 中,

$$\therefore \begin{cases} DH = DF \\ \angle BHD = \angle GFD \\ BH = GF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BHD \cong \triangle GFD,$$

$$\therefore \angle BDH = \angle GDF$$

$$\therefore \angle BDG = \angle BDH + \angle HDG = \angle GDF + \angle HDG = 60^\circ.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的判定方法，全等三角形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，菱形的判定与性质等知识点，应用时要认真领会它们之间的联系与区别，同时要根据条件合理、灵活地选择方法.

30. (1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; (2) 图见解析, $EF^2 = AE^2 + BF^2$, 证明见解析.

【分析】(1) 先根据中位线定理和线段中点定义可得 $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2}BC$, $CE = AE = a$, 再根据平行四边形的性质、矩形的判定与性质可得 $DE = CF$, 从而可得 $CF = BF = b$, 然后利用勾股定理即可得;

(2) 如图(见解析), 先根据平行线的性质可得 $\angle EAD = \angle GBD$, $\angle DEA = \angle DGB$, 再根据三角形全等的判定定理与性质可得 $ED = GD$, $AE = BG$, 然后根据垂直平分线的判定与性质可得 $EF = FG$, 最后在 $Rt\triangle BGF$ 中, 利用勾股定理、等量代换即可得证.

【详解】(1) $\because D$ 是 AB 的中点, E 是线段 AC 的中点

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 且 $CE = AE = a$

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$$

$$\because \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - \angle C = 90^\circ$$

$$\because DF \perp DE$$

$$\therefore \angle EDF = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 为矩形

$$\therefore DE = CF$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(BF + CF)$$

$$\therefore CF = BF = b$$

则在 $Rt\triangle CEF$ 中, $EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(2) 过点 B 作 AC 的平行线交 ED 的延长线于点 G , 连接 FG

$$\because BG \parallel AC$$

$$\therefore \angle EAD = \angle GBD, \angle DEA = \angle DGB$$

$\because D$ 是 AB 的中点

$$\therefore AD = BD$$

$$\text{在 } \triangle EAD \text{ 和 } \triangle GBD \text{ 中, } \begin{cases} \angle EAD = \angle GBD \\ \angle DEA = \angle DGB \\ AD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAD \cong \triangle GBD (AAS)$$

$$\therefore ED = GD, \quad AE = BG$$

$$\text{又} \because DF \perp DE$$

$$\therefore DF \text{ 是线段 } EG \text{ 的垂直平分线}$$

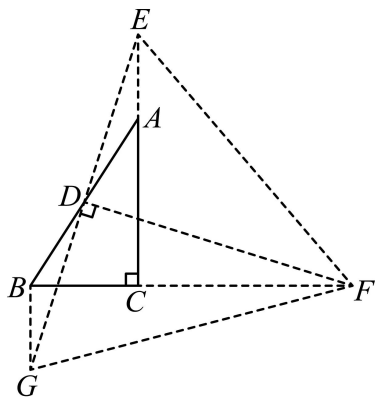
$$\therefore EF = FG$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad BG \parallel AC$$

$$\therefore \angle GBF = \angle C = 90^\circ$$

$$\text{在 } Rt\triangle BGF \text{ 中, 由勾股定理得: } FG^2 = BG^2 + BF^2$$

$$\therefore EF^2 = AE^2 + BF^2.$$

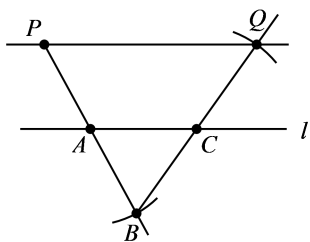


【点睛】本题考查了中位线定理、矩形的判定与性质、三角形全等的判定定理与性质、垂直平分线的判定与性质、勾股定理等知识点，较难的是题（2），通过作辅助线，构造全等三角形和直角三角形是解题关键。

31. (1)作图见解析 (2) PA , CQ , 三角形中位线平行于三角形的第三边.

【详解】分析：根据作图过程，补全图形即可.

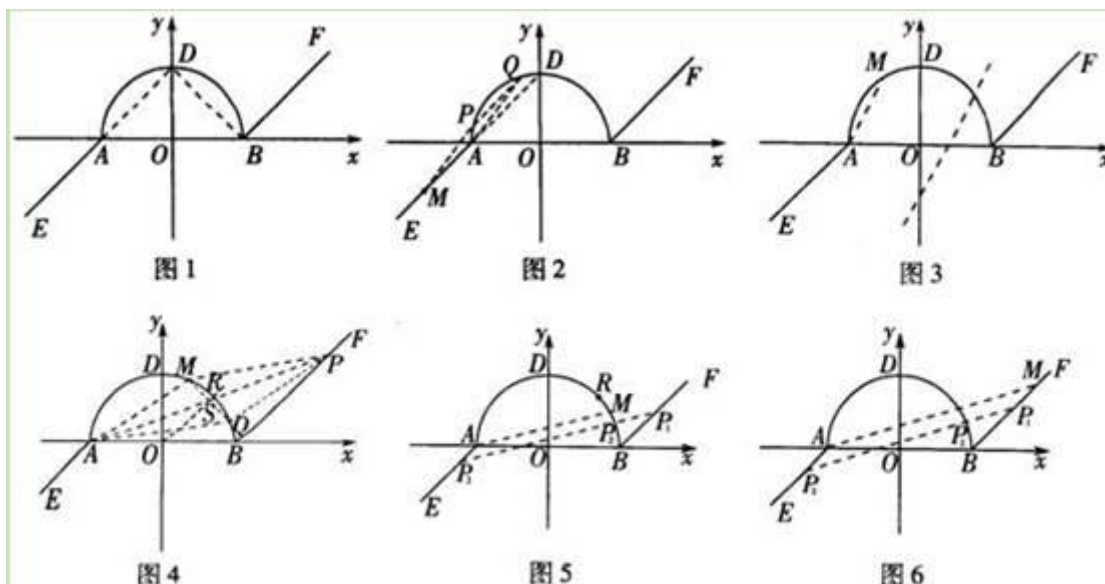
详解：(1)尺规作图如下图所示：



(2) PA , CQ , 三角形中位线平行于三角形的第三边.

点睛：考查尺规作图，三角形中位线定理，熟练掌握三角形的中位线定理是解题的关键.

32. 解：(1) 分别连接 AD 、 DB ，则点 D 在直线 AE 上，如图 1，



∵ 点 D 在以 AB 为直径的半圆上，

∴ $\angle ADB = 90^\circ$ ，

∴ $BD \perp AD$ ，

在 $Rt\triangle DOB$ 中，由勾股定理得， $BD = \sqrt{2}$ ，

∵ $AE \parallel BF$ ，

∴ 两条射线 AE、BF 所在直线的距离为 $\sqrt{2}$ 。

(2) 当一次函数 $y = x + b$ 的图象与图形 C 恰好只有一个公共点时，b 的取值范围是 $b = \sqrt{2}$ 或 $-1 < b < 1$ ；

当一次函数 $y = x + b$ 的图象与图形 C 恰好只有两个公共点时，b 的取值范围是 $1 < b < \sqrt{2}$

(3) 假设存在满足题意的平行四边形 AMPQ，根据点 M 的位置，分以下四种情况讨论：

① 当点 M 在射线 AE 上时，如图 2。

∵ AMPQ 四点按顺时针方向排列，

∴ 直线 PQ 必在直线 AM 的上方，

∴ PQ 两点都在弧 AD 上，且不与点 A、D 重合，

∴ $0 < PQ < \sqrt{2}$ 。

∵ $AM \parallel PQ$ 且 $AM = PQ$ ，

∴ $0 < AM < \sqrt{2}$

∴ $-2 < x < -1$ ，

② 当点 M 不在弧 AD 上时，如图 3，

∵ 点 A、M、P、Q 四点按顺时针方向排列，

∴ 直线 PQ 必在直线 AM 的下方，

此时，不存在满足题意的平行四边形。

③ 当点 M 在弧 BD 上时，

设弧 DB 的中点为 R，则 $OR \parallel BF$ ，

当点 M 在弧 DR 上时，如图 4，

过点 M 作 OR 的垂线交弧 DB 于点 Q, 垂足为点 S, 可得 S 是 MQ 的中点.

∴ 四边形 AMPQ 为满足题意的平行四边形,

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

当点 M 在弧 RB 上时, 如图 5,

直线 PQ 必在直线 AM 的下方,

此时不存在满足题意的平行四边形.

④ 当点 M 在射线 BF 上时, 如图 6,

直线 PQ 必在直线 AM 的下方,

此时, 不存在满足题意的平行四边形.

综上, 点 M 的横坐标 x 的取值范围是

$$-2 < x < -1 \text{ 或 } 0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【详解】略

$$33. 10 + 2\sqrt{13}.$$

【分析】先证明四边形 ACED 是平行四边形, 可得 $DE = AC = 2$. 由勾股定理和中线的定义可求 AB 和 EB 的长, 从而求出四边形 ACEB 的周长.

【详解】∵ $\angle ACB = 90^\circ$, $DE \perp BC$,

$$\therefore AC \parallel DE.$$

又 ∵ $CE \parallel AD$,

∴ 四边形 ACED 是平行四边形.

$$\therefore DE = AC = 2.$$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 由勾股定理得 $CD = \sqrt{CE^2 - DE^2} = 2\sqrt{3}$.

∵ D 是 BC 的中点,

$$\therefore BC = 2CD = 4\sqrt{3}.$$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 2\sqrt{13}$.

∵ D 是 BC 的中点, $DE \perp BC$,

$$\therefore EB = EC = 4.$$

$$\therefore \text{四边形 ACEB 的周长} = AC + CE + EB + BA = 10 + 2\sqrt{13}.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质, 勾股定理和中线的定义, 注意寻找求 AB 和 EB 的长的方法和途径.