

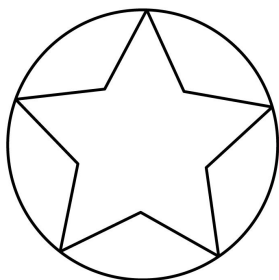
2011-2023 北京中考真题数学专项练习

图形的变换章节综合



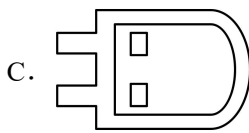
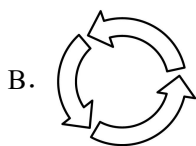
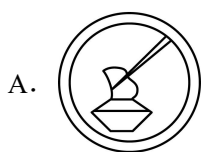
一、单选题

1. (2022 北京中考真题) 图中的图形为轴对称图形, 该图形的对称轴的条数为 ()

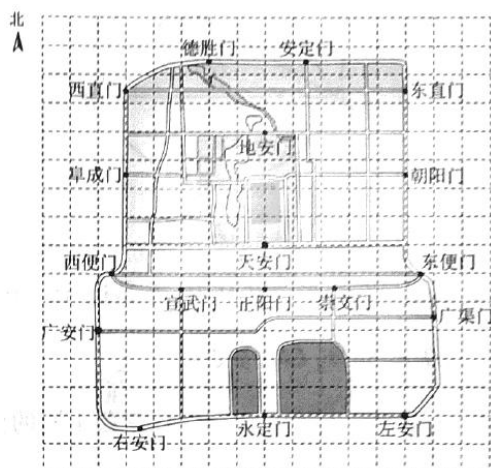


- A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

2. (2019 北京中考真题) 下列倡导节约的图案中, 是轴对称图形的是 ()



3. (2018 北京中考真题) 右图是老北京城一些地点的分布示意图. 在图中, 分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系, 有如下四个结论:

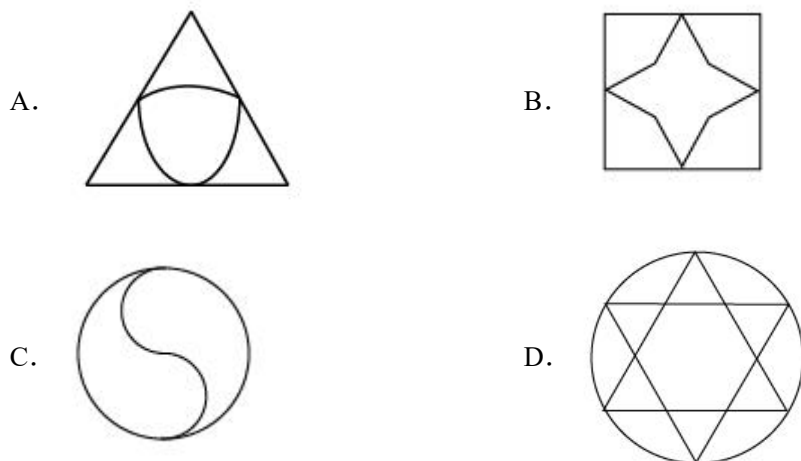


- ①当表示天安门的点的坐标为 $(0, 0)$, 表示广安门的点的坐标为 $(-6, -3)$ 时, 表示左安门的点的坐标为 $(5, -6)$;
- ②当表示天安门的点的坐标为 $(0, 0)$, 表示广安门的点的坐标为 $(-12, -6)$ 时, 表示左安门的点的坐标为 $(10, -12)$;
- ③当表示天安门的点的坐标为 $(1, 1)$, 表示广安门的点的坐标为 $(-11, -5)$ 时, 表示左安门的点的坐标为 $(11, -11)$;
- ④当表示天安门的点的坐标为 $(1.5, 1.5)$, 表示广安门的点的坐标为 $(-16.5, -7.5)$ 时, 表示左安门的点的坐标为 $(16.5, -16.5)$.

上述结论中, 所有正确结论的序号是

- A. ①③ B. ②③④ C. ①④ D. ①②③④

4. (2017 北京中考真题) 下列图形中, 是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()

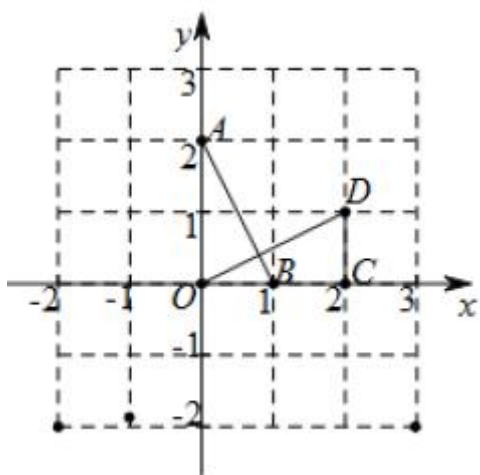


5. (2011 北京中考真题) 下列图形中, 即是中心对称又是轴对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 平行四边形 C. 梯形 D. 矩形

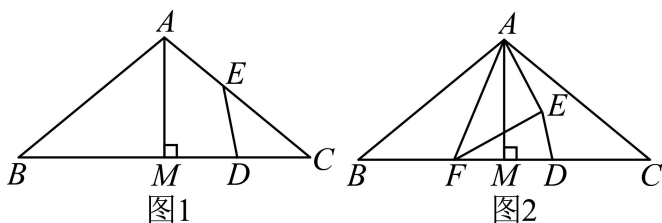
二、填空题

6. (2017 北京中考真题) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle AOB$ 可以看作是 $\triangle OCD$ 经过若干次图形的变化 (平移、轴对称、旋转) 得到的, 写出一中由 $\triangle OCD$ 得到 $\triangle AOB$ 的过程: _____.



三、证明题

7. (2023 北京中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), $AM \perp BC$ 于点 M , D 是线段 MC 上的动点 (不与点 M , C 重合), 将线段 DM 绕点 D 顺时针旋转 2α 得到线段 DE .

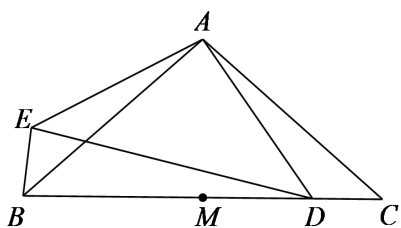


(1) 如图 1, 当点 E 在线段 AC 上时, 求证: D 是 MC 的中点;

(2) 如图 2, 若在线段 BM 上存在点 F (不与点 B , M 重合) 满足 $DF = DC$, 连接 AE , EF , 直接写出 $\angle AEF$ 的大小, 并证明.

8. (2021 北京中考真题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$, M 为 BC 的中点, 点 D 在 MC 上, 以点 A

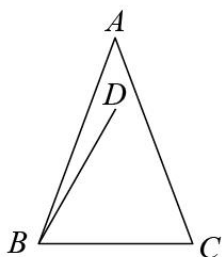
为中心，将线段 AD 顺时针旋转 α 得到线段 AE ，连接 BE, DE 。



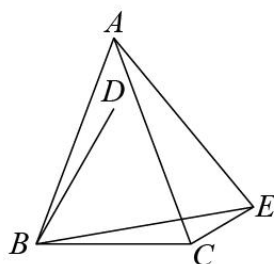
(1) 比较 $\angle BAE$ 与 $\angle CAD$ 的大小；用等式表示线段 BE, BM, MD 之间的数量关系，并证明；

(2) 过点 M 作 AB 的垂线，交 DE 于点 N ，用等式表示线段 NE 与 ND 的数量关系，并证明。

9. (2013 北京中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$)，将线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BD 。



(图1)



(图2)

(1) 如图 1，直接写出 $\angle ABD$ 的大小 (用含 α 的式子表示)；

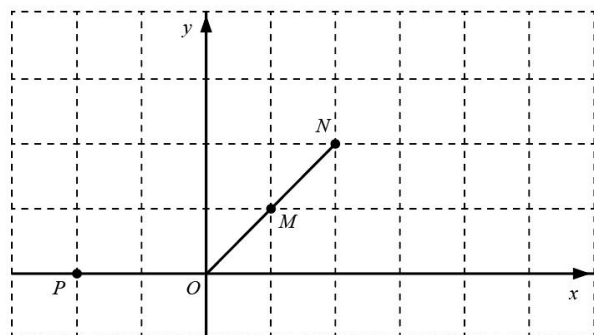
(2) 如图 2， $\angle BCE=150^\circ$ ， $\angle ABE=60^\circ$ ，判断 $\triangle ABE$ 的形状并加以证明；

(3) 在 (2) 的条件下，连接 DE ，若 $\angle DEC=45^\circ$ ，求 α 的值。

四、作图题

10. (2022 北京中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(a,b), N$ 。对于点 P 给出如下定义：将点 P 向右 ($a \geq 0$) 或向左 ($a < 0$) 平移 $|a|$ 个单位长度，再向上 ($b \geq 0$) 或向下 ($b < 0$) 平移 $|b|$ 个单位长度，得到点 P' ，点 P' 关于点 N 的对称点为 Q ，称点 Q 为点 P 的“对应点”。

(1) 如图，点 $M(1,1)$ ，点 N 在线段 OM 的延长线上，若点 $P(-2,0)$ ，点 Q 为点 P 的“对应点”。



①在图中画出点 Q ；

②连接 PQ ，交线段 ON 于点 T 。求证： $NT = \frac{1}{2}OM$ ；

(2) $\odot O$ 的半径为 1， M 是 $\odot O$ 上一点，点 N 在线段 OM 上，且 $ON = t(\frac{1}{2} < t < 1)$ ，若 P 为 $\odot O$ 外一点，点 Q 为

点 P 的“对应点”，连接 PQ . 当点 M 在 $\odot O$ 上运动时直接写出 PQ 长的最大值与最小值的差（用含 t 的式子表示）.

11. (2019 北京中考真题) 已知 $\angle AOB = 30^\circ$, H 为射线 OA 上一定点, $OH = \sqrt{3} + 1$, P 为射线 OB 上一点, M 为线段 OH 上一动点, 连接 PM , 满足 $\angle OMP$ 为钝角, 以点 P 为中心, 将线段 PM 顺时针旋转 150° , 得到线段 PN , 连接 ON .

(1) 依题意补全图 1;

(2) 求证: $\angle OMP = \angle OPN$;

(3) 点 M 关于点 H 的对称点为 Q , 连接 QP . 写出一个 OP 的值, 使得对于任意的点 M 总有 $ON = QP$, 并证明.

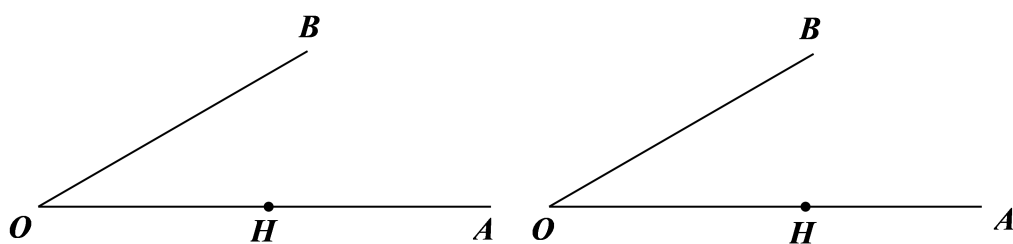


图1

备用图

12. (2014 北京中考真题) 在正方形 $ABCD$ 外侧作直线 AP , 点 B 关于直线 AP 的对称点为 E , 连接 BE , DE , 其中 DE 交直线 AP 于点 F .

(1) 依题意补全图 1.

(2) 若 $\angle PAB = 20^\circ$, 求 $\angle ADF$ 的度数.

(3) 如图 2, 若 $45^\circ < \angle PAB < 90^\circ$, 用等式表示线段 AB , FE , FD 之间的数量关系, 并证明.

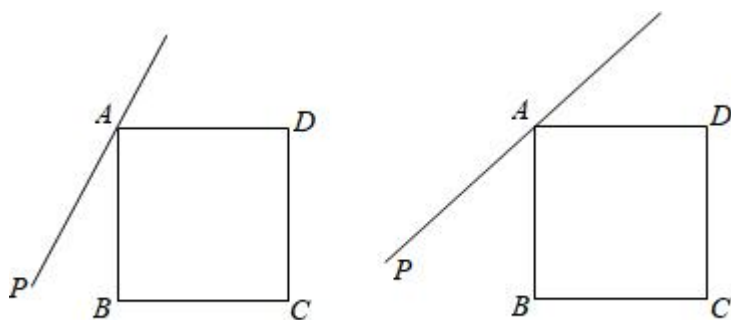
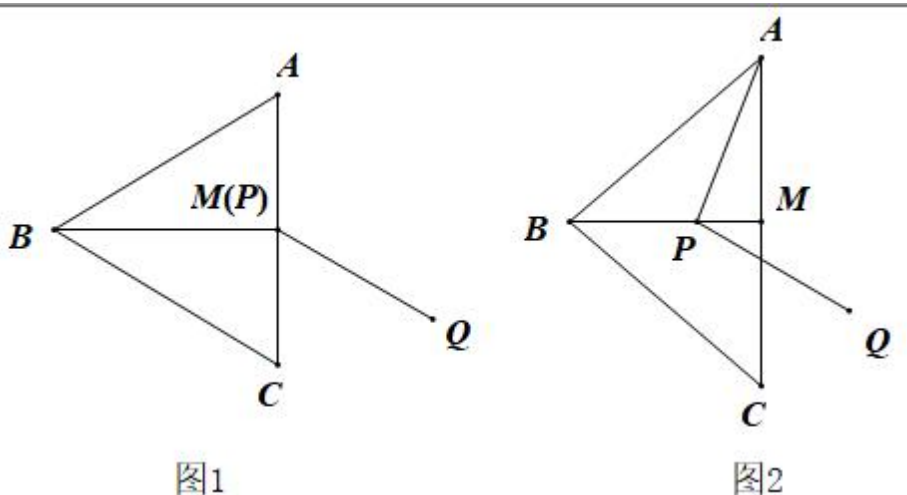


图 1

图 2

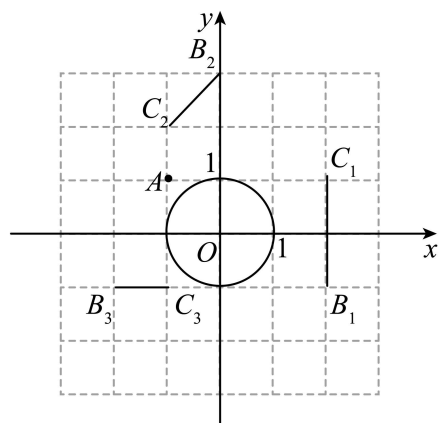
13. (2012 北京中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $BA = BC$, $\angle BAC = \alpha$, M 是 AC 的中点, P 是线段 BM 上的动点, 将线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 2α 得到线段 PQ .



- (1) 若 $\alpha = 60^\circ$ 且点 P 与点 M 重合 (如图 1), 线段 CQ 的延长线交射线 BM 于点 D , 请补全图形, 并写出 $\angle CDB$ 的度数;
- (2) 在图 2 中, 点 P 不与点 B, M 重合, 线段 CQ 的延长线与射线 BM 交于点 D , 猜想 $\angle CDB$ 的大小 (用含 α 的代数式表示), 并加以证明;
- (3) 对于适当大小的 α , 当点 P 在线段 BM 上运动到某一位置 (不与点 B, M 重合) 时, 能使得线段 CQ 的延长线与射线 BM 交于点 D , 且 $PQ = QD$, 请直接写出 α 的范围.

五、问答题

14. (2021 北京中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, 对于点 A 和线段 BC , 给出如下定义: 若将线段 BC 绕点 A 旋转可以得到 $\odot O$ 的弦 $B'C'$ (B', C' 分别是 B, C 的对应点), 则称线段 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”.



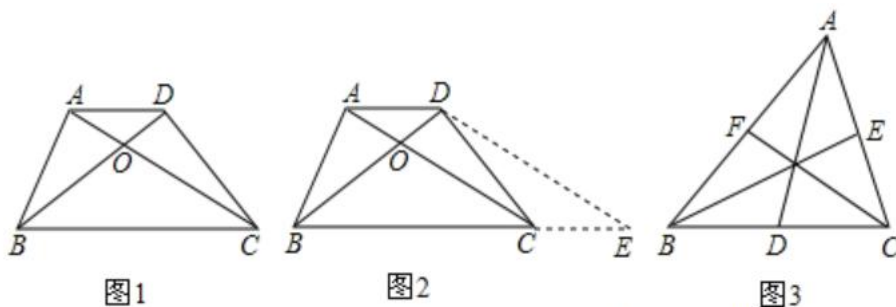
- (1) 如图, 点 $A, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3$ 的横、纵坐标都是整数. 在线段 B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 中, $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”是_____;
- (2) $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 $A(0, t)$, 其中 $t \neq 0$. 若 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 求 t 的值;
- (3) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1, AC = 2$. 若 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 直接写出 OA 的最小值和最大值, 以及相应的 BC 长.

六、计算题

15. (2011 北京中考真题) 阅读下面材料:

小伟遇到这样一个问题, 如图 1, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC, BD 相交于点 O . 若梯形 $ABCD$

的面积为 1，试求以 AC ， BD ， $AD+BC$ 的长度为三边长的三角形的面积。



小伟是这样思考的：要想解决这个问题，首先应想办法移动这些分散的线段，构造一个三角形，再计算其面积即可。他先后尝试了翻折，旋转，平移的方法，发现通过平移可以解决这个问题。他的方法是过点 D 作 AC 的平行线交 BC 的延长线于点 E ，得到的 $\triangle BDE$ 即是以 AC ， BD ， $AD+BC$ 的长度为三边长的三角形（如图 2）。

参考小伟同学的思考问题的方法，解决下列问题：

如图 3， $\triangle ABC$ 的三条中线分别为 AD ， BE ， CF 。

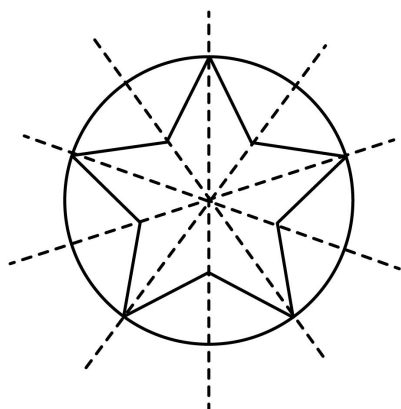
- （1）在图 3 中利用图形变换画出并指明以 AD ， BE ， CF 的长度为三边长的一个三角形（保留画图痕迹）；
- （2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，则以 AD ， BE ， CF 的长度为三边长的三角形的面积等于_____。

参考答案

1. D

【分析】根据题意，画出该图形的对称轴，即可求解.

【详解】解：如图，



一共有 5 条对称轴.

故选：D

【点睛】本题主要考查了轴对称图形，熟练掌握若一个图形沿着一条直线折叠后两部分能完全重合，这样的图形就叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴是解题的关键.

2. C

【分析】如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，根据轴对称图形的概念求解.

【详解】解：A、不是轴对称图形，故此选项错误；

B、不是轴对称图形，故此选项错误；

C、是轴对称图形，故此选项正确；

D、不是轴对称图形，故此选项错误.

故选 C.

【点睛】此题主要考查了轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

3. D

【详解】分析：根据天安门的坐标和点的平移规律，一一进行判断即可.

详解：显然①②正确；

③是在②的基础上，将所有点向右平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位得到，故③正确；

④是在“当表示天安门的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示广安门的点的坐标为 $(-18, -9)$ 时，表示左安门的点的坐标为 $(15, -18)$ ”的基础上，将所有点向右平移 1.5 个单位，再向上平移 1.5 个单位得到，故④正确.

故选 D.

点睛：考查平面直角坐标系，点坐标的确定，点的平移，熟练掌握点的平移规律是解题的关键.

4. A

【详解】A.是轴对称图形不是中心对称图形，符合题意，

- B.是轴对称图形也是中心对称图形，不符合题意，
 C.是中心对称图形不是轴对称图形，不符合题意，
 D.是轴对称图形也是中心对称图形，不符合题意，

故选：A.

【点睛】本题考查轴对称图形与中心对称图形，正确地识别是解题的关键.

5. D

- 【详解】A、是轴对称图形，不是中心对称图形. 故本选项错误；
 B、不是轴对称图形，是中心对称图形. 故本选项错误；
 C、一般梯形不是轴对称图形，也不是中心对称图形. 故本选项错误；
 D、既是轴对称图形，又是中心对称图形. 故本选项正确. 故选 D.

6. 将 $\triangle COD$ 绕点C顺时针旋转 90° ，再向左平移2个单位长度得到 $\triangle AOB$ （答案不唯一）

【详解】解： $\triangle OCD$ 绕C点旋转 90° ，并向左平移2个单位得到 $\triangle AOB$ （答案不唯一）.
 故答案为答案不唯一，如： $\triangle OCD$ 绕C点旋转 90° ，并向左平移2个单位得到 $\triangle AOB$.

7. (1)见解析

(2) $\angle AEF = 90^\circ$ ，证明见解析

【分析】（1）由旋转的性质得 $DM = DE$ ， $\angle MDE = 2\alpha$ ，利用三角形外角的性质求出 $\angle DEC = \alpha = \angle C$ ，可得 $DE = DC$ ，等量代换得到 $DM = DC$ 即可；

（2）延长FE到H使 $FE = EH$ ，连接CH，AH，可得DE是 $\triangle FCH$ 的中位线，然后求出 $\angle B = \angle ACH$ ，设 $DM = DE = m$ ， $CD = n$ ，求出 $BF = 2m = CH$ ，证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACH$ （SAS），得到 $AF = AH$ ，再根据等腰三角形三线合一证明 $AE \perp FH$ 即可.

【详解】（1）证明：由旋转的性质得： $DM = DE$ ， $\angle MDE = 2\alpha$ ，

$$\because \angle C = \alpha,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle MDE - \angle C = \alpha,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEC,$$

$$\therefore DE = DC,$$

$$\therefore DM = DC, \text{ 即 } D \text{ 是 } MC \text{ 的中点};$$

（2） $\angle AEF = 90^\circ$ ；

证明：如图2，延长FE到H使 $FE = EH$ ，连接CH，AH，

$$\because DF = DC,$$

$$\therefore DE \text{ 是 } \triangle FCH \text{ 的中位线},$$

$$\therefore DE \parallel CH, CH = 2DE,$$

由旋转的性质得： $DM = DE$ ， $\angle MDE = 2\alpha$ ，

$$\therefore \angle FCH = 2\alpha,$$

$$\because \angle B = \angle C = \alpha,$$

$$\therefore \angle ACH = \alpha, \triangle ABC \text{ 是等腰三角形},$$

$$\therefore \angle B = \angle ACH, \quad AB = AC,$$

设 $DM = DE = m$, $CD = n$, 则 $CH = 2m$, $CM = m + n$,

$$\therefore DF = CD = n,$$

$$\therefore FM = DF - DM = n - m,$$

$$\because AM \perp BC,$$

$$\therefore BM = CM = m + n,$$

$$\therefore BF = BM - FM = m + n - (n - m) = 2m,$$

$$\therefore CH = BF,$$

$$\text{在 } \triangle ABF \text{ 和 } \triangle ACH \text{ 中, } \begin{cases} AB = AC \\ \angle B = \angle ACH, \\ BF = CH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACH (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = AH,$$

$$\because FE = EH,$$

$$\therefore AE \perp FH, \text{ 即 } \angle AEF = 90^\circ.$$

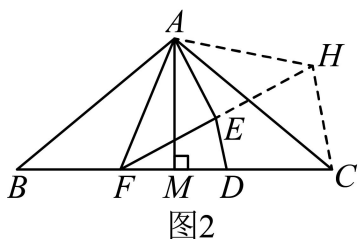


图2

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定和性质，旋转的性质，三角形外角的性质，三角形中位线定理以及全等三角形的判定和性质等知识，作出合适的辅助线，构造出全等三角形是解题的关键.

8. (1) $\angle BAE = \angle CAD$, $BM = BE + MD$, 理由见详解; (2) $DN = EN$, 理由见详解.

【分析】(1) 由题意及旋转的性质易得 $\angle BAC = \angle EAD = \alpha$, $AE = AD$, 然后可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 进而问题可求解;

(2) 过点 E 作 $EH \perp AB$, 垂足为点 Q , 交 AB 于点 H , 由(1)可得 $\angle ABE = \angle ACD$, $BE = CD$, 易证 $BH = BE = CD$, 进而可得 $HM = DM$, 然后可得 $\triangle DMN \sim \triangle DHE$, 最后根据相似三角形的性质可求证.

【详解】(1) 证明: $\because \angle BAC = \angle EAD = \alpha$,

$$\therefore \angle BAE + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAD = \alpha,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAD,$$

由旋转的性质可得 $AE = AD$,

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = CD,$$

$\because$ 点 M 为 BC 的中点,

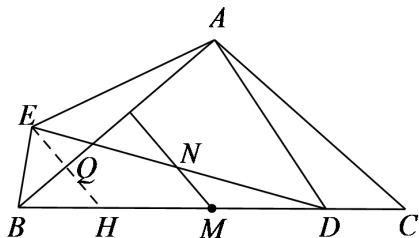
$$\therefore BM = CM,$$

$$\because CM = MD + CD = MD + BE,$$

$$\therefore BM = BE + MD;$$

(2) 证明: $DN = EN$, 理由如下:

过点 E 作 $EH \perp AB$, 垂足为点 Q , 交 BC 于点 H , 如图所示:



$$\therefore \angle EQB = \angle HQB = 90^\circ,$$

由 (1) 可得 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$,

$$\therefore \angle ABE = \angle ACD, \quad BE = CD,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \angle ABE,$$

$$\because BQ = BQ,$$

$$\therefore \triangle BQE \cong \triangle BQH \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BH = BE = CD,$$

$$\because MB = MC,$$

$$\therefore HM = DM,$$

$$\because MN \perp AB,$$

$$\therefore MN \parallel EH,$$

$$\therefore \triangle DMN \sim \triangle DHE,$$

$$\therefore \frac{DM}{DH} = \frac{DN}{DE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DN = EN.$$

【点睛】 本题主要考查全等三角形的性质与判定、相似三角形的性质与判定及等腰三角形的性质、旋转的性质, 熟练掌握全等三角形的性质与判定、相似三角形的性质与判定及等腰三角形的性质、旋转的性质是解题的关键.

$$9. (1) 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha \quad (2) \text{见解析} \quad (3) \alpha = 30^\circ$$

【分析】 (1) 利用三角形内角和为 180° , 求出 $\angle ABC$ 的度数, 即可求出答案;

(2) 连接 AD , CD , ED , 根据旋转性质得出 $BC = BD$, $\angle DBC = 60^\circ$, 求出 $\angle ABD = \angle EBC = 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, 且 $\triangle BCD$ 为等边三角形, 证 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 推出 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\alpha$, 求出 $\angle BEC = \frac{1}{2}\alpha = \angle BAD$, 证

$\triangle ABD \cong \triangle EBC$, 推出 $AB=BE$ 即可;

(3) 求出 $\angle DCE=90^\circ$, $\triangle DEC$ 为等腰直角三角形, 推出 $DC=CE=BC$, 求出 $\angle EBC=15^\circ$, 得出方程 $30^\circ - \frac{1}{2}\alpha = 15^\circ$, 求出即可.

【详解】(1) 解: $\because AB=AC$, $\angle A=\alpha$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB, \quad \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\because \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC, \quad \angle DBC = 60^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ABD = 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha;$$

(2) $\triangle ABE$ 为等边三角形.

证明: 如图, 连接 AD , CD , ED ,

$\because$ 线段 BC 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BD ,

$$\therefore BC=BD, \quad \angle DBC=60^\circ.$$

$$\text{又 } \because \angle ABE=60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 60^\circ - \angle DBE = \angle EBC = 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha \text{ 且 } \triangle BCD \text{ 为等边三角形.}$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\because AB=AC, \quad AD=AD, \quad BD=CD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD \text{ (SSS).}$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\because \angle BCE=150^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 180^\circ - (30^\circ - \frac{1}{2}\alpha) - 150^\circ = \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BAD.$$

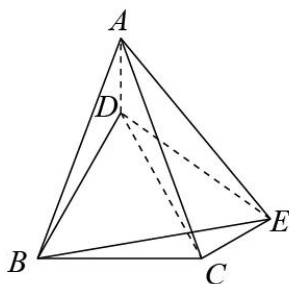
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBC$ 中,

$$\because \angle BEC = \angle BAD, \quad \angle EBC = \angle ABD, \quad BC=BD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBC \text{ (AAS).}$$

$$\therefore AB=BE.$$

$\therefore \triangle ABE$ 为等边三角形.



$$(3) \because \angle BCD=60^\circ, \angle BCE=150^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle DEC=45^\circ,$$

$\therefore \triangle DCE$ 为等腰直角三角形.

$$\therefore DC=CE=BC.$$

$$\because \angle BCE=150^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \frac{(180^\circ - 150^\circ)}{2} = 15^\circ.$$

$$\text{而 } \angle EBC = 30^\circ - \frac{1}{2}\alpha = 15^\circ.$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ.$$

【点睛】本题考查了旋转的性质、全等三角形的性质和判定，等边三角形的性质和判定，等腰直角三角形的判定和性质的应用，其中，理解与掌握相关概念并能正确运用作辅助线构造全等三角形与等边三角形是解决本题的关键，本题综合性较强，对学生的能力要求较高.

10. (1)见解析

$$(2) 4t - 2$$

【分析】(1) ①先根据定义和 $M(1,1)$ 求出点 P' 的坐标，再根据点 P' 关于点 N 的对称点为 Q 求出点 Q 的坐标；

②延长 ON 至点 $A(3,3)$ ，连接 AQ ，利用 AAS 证明 $\triangle AQT \cong \triangle OPT$ ，得到 $TA = TO = \frac{1}{2}OA$ ，再计算出 OA ，

$$OM, ON \text{ 即可求出 } NT = ON - OT = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}OM;$$

(2) 连接 PO 并延长至 S ，使 $OP = OS$ ，延长 SQ 至 T ，使 $ST = OM$ ，结合对称的性质得出 NM 为 $\triangle P'QT$ 的中位线，推出 $NM = \frac{1}{2}QT$ ，得出 $SQ = ST - TQ = 1 - (2 - 2t) = 2t - 1$ ，则

$$PQ_{\max} - PQ_{\min} = (PS + QS) - (PS - QS) = 2QS.$$

【详解】(1) 解：①点 Q 如下图所示.

$$\because \text{点 } M(1,1),$$

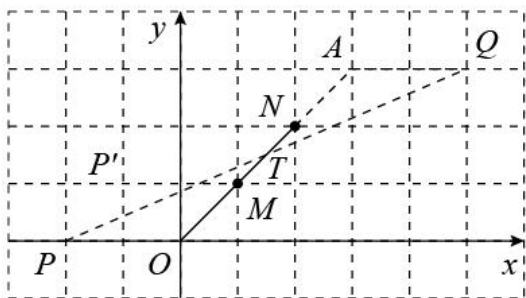
$$\therefore \text{点 } P(-2,0) \text{ 向右平移 } 1 \text{ 个单位长度，再向上平移 } 1 \text{ 个单位长度，得到点 } P',$$

$$\therefore P'(-1,1),$$

$$\because \text{点 } P' \text{ 关于点 } N \text{ 的对称点为 } Q, N(2,2),$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的横坐标为: } 2 \times 2 - (-1) = 5, \text{ 纵坐标为: } 2 \times 2 - 1 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } Q(5,3), \text{ 在坐标系内找出该点即可;}$$



②证明：如图延长 ON 至点 $A(3,3)$ ，连接 AQ ，

$$\because AQ \parallel OP,$$

$$\therefore \angle AQT = \angle OPT,$$

在 $\triangle AQT$ 与 $\triangle OPT$ 中，

$$\begin{cases} \angle AQT = \angle OPT \\ \angle ATQ = \angle OTP, \\ AQ = OP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AQT \cong \triangle OPT (AAS),$$

$$\therefore TA = TO = \frac{1}{2}OA,$$

$$\because A(3,3), M(1,1), N(2,2),$$

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, ON = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore TO = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore NT = ON - OT = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

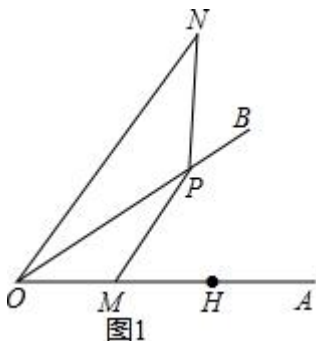
$$\therefore NT = \frac{1}{2}OM;$$

(2) 解：如图所示，

$\angle OMP = 180^\circ - 30^\circ - \angle OPM = 150^\circ - \angle OPM$, 得证.

(3) 根据题意画出图形, 以 $ON=QP$ 为已知条件反推 OP 的长度. 由 (2) 的结论 $\angle OMP = \angle OPN$ 联想到其补角相等, 又因为旋转有 $PM=PN$, 已具备一边一角相等, 过点 N 作 $NC \perp OB$ 于点 C , 过点 P 作 $PD \perp OA$ 于点 D , 即可构造出 $\triangle PDM \cong \triangle NCP$, 进而得 $PD=NC$, $DM=CP$. 此时加上 $ON=QP$, 则易证得 $\triangle OCN \cong \triangle QDP$, 所以 $OC=QD$. 再设 $DM=CP=x$, 所以 $OC=OP+PC=2+x$, $MH=MD+DH=x+1$, 由于点 M 、 Q 关于点 H 对称, 得出 $DQ=DH+HQ=1+x+1=2+x$, 得出 $OC=DQ$, 再利用 SAS 得出 $\triangle OCN \cong \triangle QDP$ 即可

【详解】解: (1) 如图 1 所示为所求.



(2) 设 $\angle OPM = \alpha$,

$\because$ 线段 PM 绕点 P 顺时针旋转 150° 得到线段 PN

$\therefore \angle MPN = 150^\circ$, $PM = PN$

$\therefore \angle OPN = \angle MPN - \angle OPM = 150^\circ - \alpha$

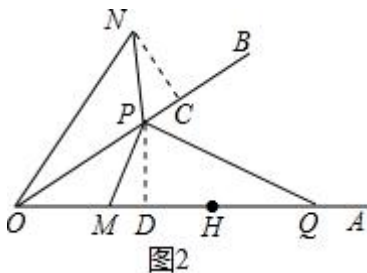
$\because \angle AOB = 30^\circ$

$\therefore \angle OMP = 180^\circ - \angle AOB - \angle OPM = 180^\circ - 30^\circ - \alpha = 150^\circ - \alpha$

$\therefore \angle OMP = \angle OPN$

(3) $OP=2$ 时, 总有 $ON=QP$, 证明如下:

过点 N 作 $NC \perp OB$ 于点 C , 过点 P 作 $PD \perp OA$ 于点 D , 如图 2



$\therefore \angle NCP = \angle PDM = \angle PDQ = 90^\circ$

$\because \angle AOB = 30^\circ$, $OP = 2$

$\therefore PD = \frac{1}{2}OP = 1$

$\therefore OD = \sqrt{OP^2 - PD^2} = \sqrt{3}$

$\therefore OH = \sqrt{3} + 1$

$\therefore DH = OH - OD = 1$

$\therefore \angle OMP = \angle OPN$

$$\therefore 180^\circ - \angle OMP = 180^\circ - \angle OPN$$

$$\text{即 } \angle PMD = \angle NPC$$

在 $\triangle PDM$ 与 $\triangle NCP$ 中

$$\begin{cases} \angle PDM = \angle NCP \\ \angle PMD = \angle NPC \\ PM = NP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PDM \cong \triangle NCP \text{ (AAS)}$$

$$\therefore PD = NC, DM = CP$$

设 $DM = CP = x$, 则 $OC = OP + PC = 2 + x$, $MH = MD + DH = x + 1$

$\because$ 点 M 关于点 H 的对称点为 Q

$$\therefore HQ = MH = x + 1$$

$$\therefore DQ = DH + HQ = 1 + x + 1 = 2 + x$$

$$\therefore OC = DQ$$

在 $\triangle OCN$ 与 $\triangle QDP$ 中

$$\begin{cases} OC = QD \\ \angle OCN = \angle QDP = 90^\circ \\ NC = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCN \cong \triangle QDP \text{ (SAS)}$$

$$\therefore ON = QP$$

【点睛】本题考查了根据题意画图，旋转的性质，三角形内角和 180° ，勾股定理，全等三角形的判定和性质，中心对称的性质．第（3）题的解题思路是以 $ON = QP$ 为条件反推 OP 的长度，并结合（2）的结论构造全等三角形；而证明过程则以 $OP = 2$ 为条件构造全等证明 $ON = QP$ ．

$$12. (1) \text{ 图形见解析 } (2) 25^\circ (3) EF^2 + FD^2 = 2AB^2$$

【分析】（1）按照题意补全图形

（2）连接 AE ，根据轴对称性和正方形的性质可得 $\angle EAD = \angle PAB + \angle PAE = 130^\circ$ ，即可求解；

（3）连接 AE 、 BF 、 BD ，根据轴对称性和正方形的性质可得 $\angle ABF = \angle AEF = \angle ADF$ ，从而得到 $BD = \sqrt{2}AB$ ， $\angle BFD = \angle BAD = 90^\circ$ ，再由勾股定理，即可求解．

【详解】解：（1）补全图形如图所示：

（2）连接 AE ，

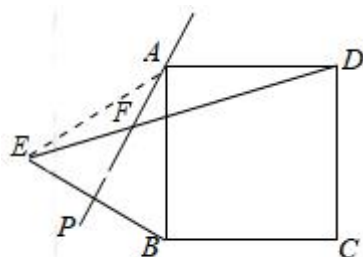


图 1

根据题意得： $\angle PAB = \angle PAE = 20^\circ$, $AE = AB = AD$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle PAB + \angle PAE = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAE) = 25^\circ;$$

(3) $EF^2 + FD^2 = 2AB^2$, 理由如下:

连接 AE 、 BF 、 BD ,

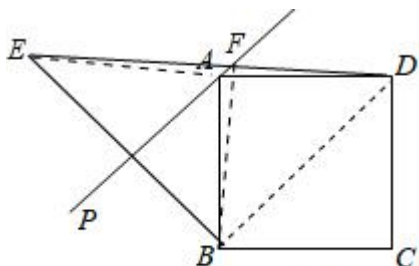


图 2

由轴对称的性质可得: $EF = BF$, $AE = AB = AD$,

$$\therefore \angle BEF = \angle EBF, \angle AEB = \angle ABE, \angle AED = \angle ADF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AEF = \angle ADF,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, AB = AD,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2} AB^2 = \sqrt{2} AB,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle DBF + \angle ADB = \angle DBF + \angle ADB + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BF^2 + FD^2 = BD^2$$

$$\therefore EF^2 + FD^2 = 2AB^2.$$

【点睛】本题主要考查了轴对称的性质, 正方形的性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质, 熟练掌握轴对称的性质, 正方形的性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质是解题的关键.

13. (1) 图见解析, 30°

$$(2) \angle CDB = 90^\circ - \alpha$$

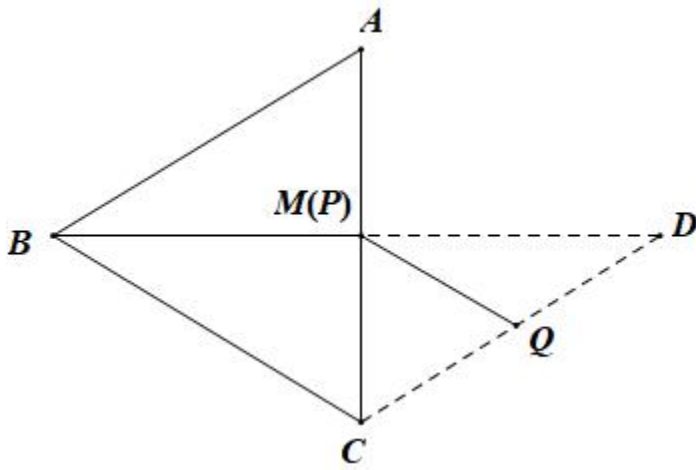
$$(3) 45^\circ < \alpha < 60^\circ.$$

【分析】(1) 利用图形旋转的性质以及等边三角形的判定得出 $\triangle CMQ$ 是等边三角形, 即可得出答案:

(2) 首先由已知得出 $\triangle APD \cong \triangle CPD$, 从而得出 $\angle PAD + \angle PQD = \angle PQC + \angle PQD = 180^\circ$, 即可求出;

(3) 由点 P 不与点 B , M 重合, 得到 $\angle BAD > \angle PAD > \angle MAD$, 由此求解即可.

【详解】(1) 解: 补全图形如下:



$\because BA=BC$, 点 M 是 AC 的中点,

$\therefore AC \perp BD$, $AM=CM$

$\therefore \angle CMD=90^\circ$,

$\therefore \angle AMQ = 2\alpha = 120^\circ$,

$\therefore \angle CMQ=60^\circ$,

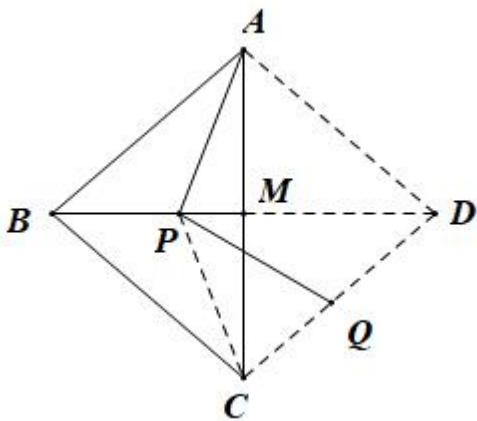
由旋转的性质可得 $AM=QM=CM$,

$\therefore \triangle CMQ$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DCM=60^\circ$

$\therefore \angle CDB=30^\circ$.

(2) 解: 作线段 CQ 的延长线交射线 BM 于点 D , 连接 PC , AD ,



$\because AB=BC$, M 是 AC 的中点,

$\therefore BM \perp AC$.

$\therefore AD=CD$, $AP=PC$,

在 $\triangle APD$ 与 $\triangle CPD$ 中,

$$\begin{cases} AD=CD \\ PD=PD \\ PA=PC \end{cases}$$

$\therefore \triangle APD \cong \triangle CPD$ (SSS).

$$\therefore \angle ADB = \angle CDB, \angle PAD = \angle PCD.$$

$$\text{又} \because PQ = PA,$$

$$\therefore PQ = PC, \angle ADC = 2\angle CDB,$$

$$\therefore \angle PQC = \angle PCD = \angle PAD.$$

$$\therefore \angle PAD + \angle PQD = \angle PQC + \angle PQD = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle APQ + \angle ADC = 360^\circ - (\angle PAD + \angle PQD) = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle APQ = 180^\circ - 2\alpha, \text{ 即 } 2\angle CDB = 180^\circ - 2\alpha.$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ - \alpha.$$

(3) 解：由(2)得出 $\angle CDB = 90^\circ - \alpha$, 且 $PQ = QD$,

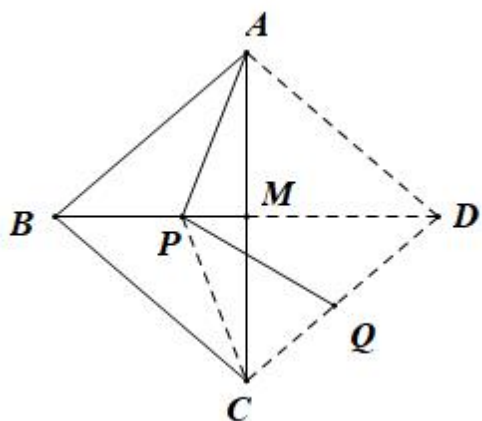
$$\therefore \angle PAD = \angle PCQ = \angle PQC = 2\angle CDB = 180^\circ - 2\alpha, \angle MAD = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha,$$

$\because$ 点 P 不与点 B, M 重合,

$$\therefore \angle BAD > \angle PAD > \angle MAD.$$

$$\therefore 2\alpha > 180^\circ - 2\alpha > \alpha,$$

$$\therefore 45^\circ < \alpha < 60^\circ.$$



【点睛】本题主要考查了旋转的性质，等边三角形的判定和性质，三角形内角和定理，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，熟知相关知识是解题的关键.

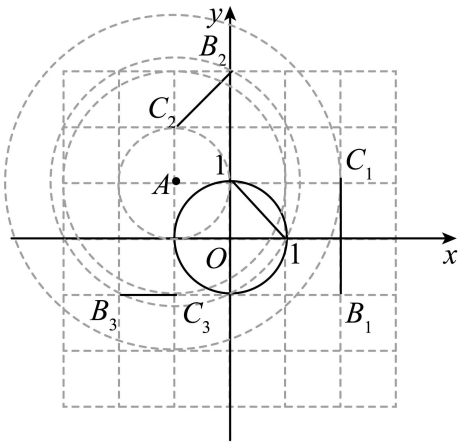
$$14. (1) B_2C_2; (2) t = \pm\sqrt{3}; (3) \text{ 当 } OA_{\min} = 1 \text{ 时, 此时 } BC = \sqrt{3}; \text{ 当 } OA_{\max} = 2 \text{ 时, 此时 } BC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【分析】(1) 以点 A 为圆心，分别以 $AB_1, AC_1, AB_2, AC_2, AB_3, AC_3$ 为半径画圆，进而观察是否与 $\odot O$ 有交点即可；

(2) 由旋转的性质可得 $\triangle AB'C'$ 是等边三角形，且 $B'C'$ 是 $\odot O$ 的弦，进而画出图象，则根据等边三角形的性质可进行求解；

(3) 由 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”，则可知 B', C' 都在 $\odot O$ 上，且 $AB' = AB = 1, AC' = AC = 2$ ，然后由题意可根据图象来进行求解即可.

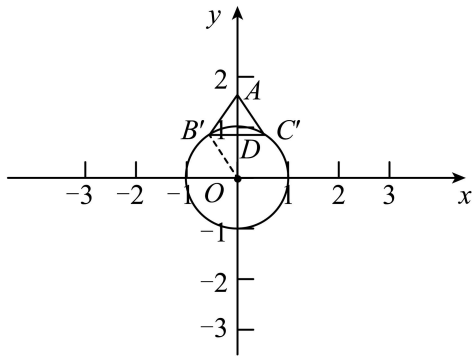
【详解】解：(1) 由题意得：



通过观察图象可得：线段 B_2C_2 能绕点 A 旋转 90° 得到 $\odot O$ 的“关联线段”， B_1C_1, B_3C_3 都不能绕点 A 进行旋转得到；

故答案为 B_2C_2 ；

(2) 由题意可得：当 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”时，则有 $\triangle AB'C'$ 是等边三角形，且边长也为 1，当点 A 在 y 轴的正半轴上时，如图所示：



设 $B'C'$ 与 y 轴的交点为 D ，连接 OB' ，易得 $B'C' \perp y$ 轴，

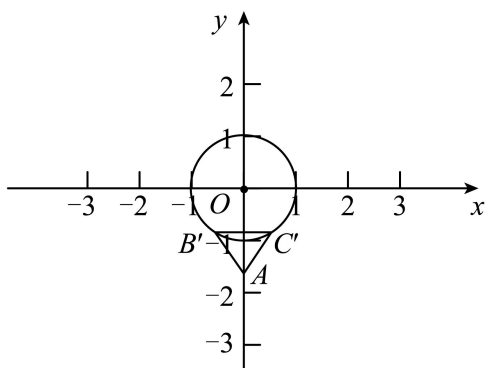
$$\therefore B'D = DC' = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OD = \sqrt{OB'^2 - B'D^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AD = \sqrt{AB'^2 - B'D^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OA = \sqrt{3},$$

$$\therefore t = \sqrt{3};$$

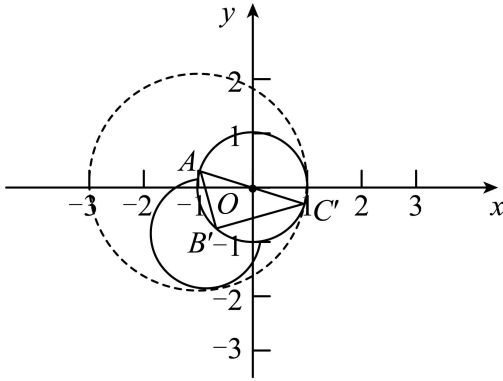
当点 A 在 y 轴的正半轴上时，如图所示：



同理可得此时的 $OA = \sqrt{3}$,

$$\therefore t = -\sqrt{3};$$

(3) 由 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 则可知 B', C' 都在 $\odot O$ 上, 且 $AB' = AB = 1, AC' = AC = 2$, 则有当以 B' 为圆心, 1 为半径作圆, 然后以点 A 为圆心, 2 为半径作圆, 即可得到点 A 的运动轨迹, 如图所示:



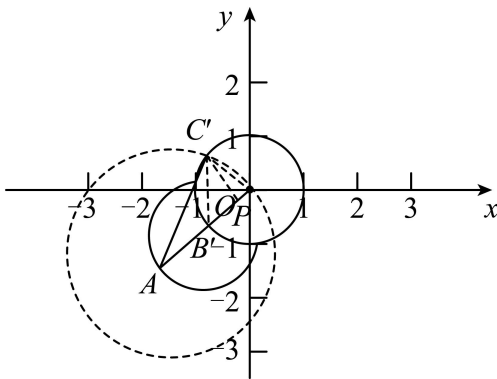
由运动轨迹可得当点 A 也在 $\odot O$ 上时为最小, 最小值为 1, 此时 AC' 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AB'C' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'B' = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = B'C' = AC' \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3};$$

由以上情况可知当点 A, B', O 三点共线时, OA 的值为最大, 最大值为 2, 如图所示:



连接 $OC', B'C'$, 过点 C' 作 $C'P \perp OA$ 于点 P ,

$$\therefore OC' = 1, AC' = OA = 2,$$

设 $OP = x$, 则有 $AP = 2 - x$,

$$\therefore \text{由勾股定理可得: } C'P^2 = AC'^2 - AP^2 = OC'^2 - OP^2, \text{ 即 } 2^2 - (2 - x)^2 = 1 - x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{4},$$

$$\therefore C'P = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore B'P = OB' - OP = \frac{3}{4},$$

在 $Rt\triangle B'PC'$ 中, $B'C' = \sqrt{B'P^2 + C'P^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$$\therefore BC = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

综上所述: 当 $OA_{\min} = 1$ 时, 此时 $BC = \sqrt{3}$; 当 $OA_{\max} = 2$ 时, 此时 $BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】本题主要考查旋转的综合、圆的基本性质、三角函数及等边三角形的性质, 熟练掌握旋转的性质、圆的基本性质、三角函数及等边三角形的性质是解题的关键.

15. (1) 证明见解析; (2) $\frac{3}{4}$.

【分析】根据平移可知, $\triangle ADC \cong \triangle ECD$, 且由梯形的性质知 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 的面积相等, 即 $\triangle BDE$ 的面积等于梯形 $ABCD$ 的面积.

(1) 分别过点 F 、 C 作 BE 、 AD 的平行线交于点 P , 得到的 $\triangle CFP$ 即是以 AD 、 BE 、 CF 的长度为三边长的一个三角形.

(2) 由平移的性质可得对应线段平行且相等, 对应角相等. 结合图形知以 AD 、 BE 、 CF 的长度为三边长的三角形的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积 $\frac{3}{4}$.

【详解】解: $\triangle BDE$ 的面积等于 1.

(1) 如图. 以 AD 、 BE 、 CF 的长度为三边长的一个三角形是 $\triangle CFP$.

(2) 平移 AF 到 PE , 可得 $AF \parallel PE$, $AF = PE$,

$\therefore$ 四边形 $AFEP$ 为平行四边形,

$\therefore AE$ 与 PF 互相平分, 即 M 为 PF 的中点,

又 $\because AP \parallel FN$, F 为 AB 的中点,

$\therefore N$ 为 PC 的中点,

$\therefore E$ 为 $\triangle PFC$ 各边中线的交点,

$\therefore \triangle PEC$ 的面积为 $\triangle PFC$ 面积的 $\frac{1}{3}$

连接 DE , 可知 DE 与 PE 在一条直线上

$\therefore \triangle EDC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$

所以 $\triangle PFC$ 的面积是 $1 \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$

$\therefore$ 以 AD 、 BE 、 CF 的长度为三边长的三角形的面积等于 $\frac{3}{4}$.

