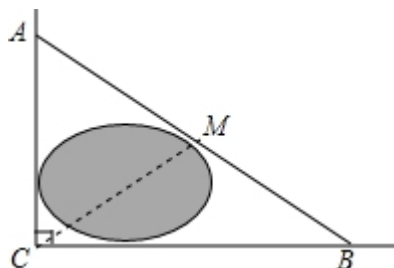




平行四边形

一、单选题

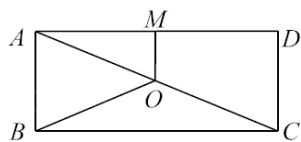
1. (2015·北京·中考真题) 如图, 公路 AC , BC 互相垂直, 公路 AB 的中点 M 与点 C 被湖隔开, 若测得 AM 的长为 1.2km , 则 M 、 C 两点间的距离为 ()



- A. 0.5km B. 0.6km C. 0.9km D. 1.2km

二、填空题

2. (2013·北京·中考真题) 如图, O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点, M 是 AD 的中点. 若 $AB=5$, $AD=12$, 则四边形 $ABOM$ 的周长为_____.



3. (2019·北京·中考真题) 在矩形 $ABCD$ 中, M , N , P , Q 分别为边 AB , BC , CD , DA 上的点 (不与端点重合), 对于任意矩形 $ABCD$, 下面四个结论中,

- ①存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形;
- ②存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形;
- ③存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形;
- ④至少存在一个四边形 $MNPQ$ 是正方形.

所有正确结论的序号是_____.

4. (2019·北京·中考真题) 把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形, 将这四个直角三角形分别拼成如图 2, 图 3 所示的正方形, 则图 1 中菱形的面积为_____.

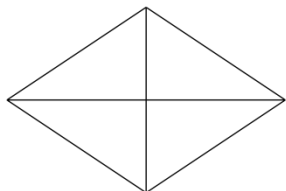


图1

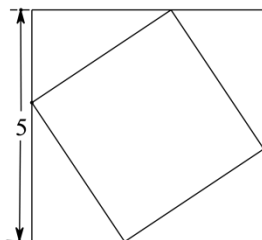


图2

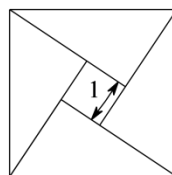
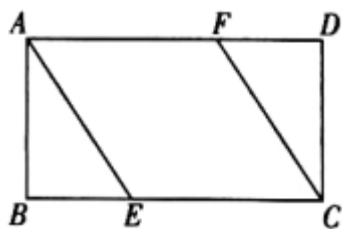


图3

5. (2021·北京·中考真题) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别在 BC , AD 上, $AF=EC$. 只需添加一个条件即可证明四边形 $AECF$ 是菱形, 这个条件可以是_____ (写出一个即可).



三、解答题

6. (2014·北京·中考真题) 在正方形 $ABCD$ 外侧作直线 AP , 点 B 关于直线 AP 的对称点为 E , 连接 BE , DE , 其中 DE 交直线 AP 于点 F .

(1) 依题意补全图1.

(2) 若 $\angle PAB = 20^\circ$, 求 $\angle ADF$ 的度数.

(3) 如图2, 若 $45^\circ < \angle PAB < 90^\circ$, 用等式表示线段 AB , FE , FD 之间的数量关系, 并证明.

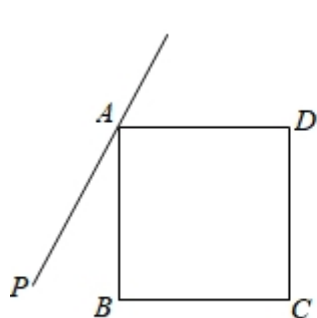


图1

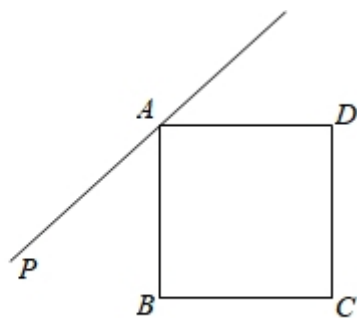
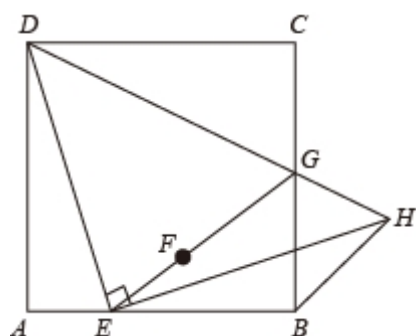


图2

7. (2018·北京·中考真题) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上的一动点 (不与点 A 、 B 重合), 连接 DE , 点 A 关于直线 DE 的对称点为 F , 连接 EF 并延长交 BC 于点 G , 连接 DG , 过点 E 作 $EH \perp DE$ 交 DG 的延长线于点 H , 连接 BH .

(1) 求证: $GF = GC$;

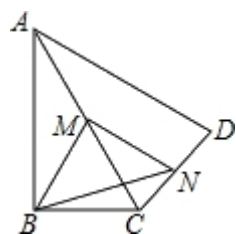
(2) 用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系, 并证明.



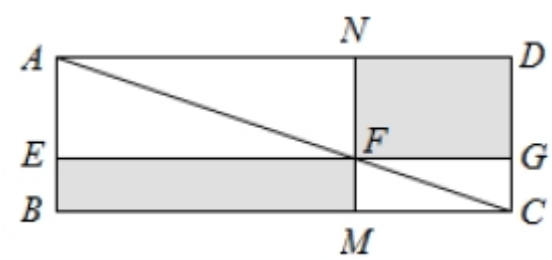
8. (2016·北京·中考真题) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = AD$, M , N 分别为 AC , CD 的中点, 连接 BM , MN , BN .

(1) 求证: $BM = MN$;

(2) $\angle BAD = 60^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, $AC = 2$, 求 BN 的长.



9. （2017·北京·中考真题）数学家吴文俊院士非常重视古代数学家贾宪提出的“从长方形对角线上任一点作两条分别平行于两邻边的直线，则所容两长方形面积相等（如图所示）”这一推论，他从这一推论出发，利用“出入相补”原理复原了《海岛算经》九题古证.,



（以上材料来源于《古证复原的原理》、《吴文俊与中国数学》和《古代世界数学泰斗刘徽》）

请根据上图完成这个推论的证明过程.

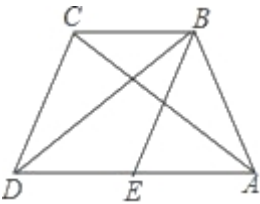
证明： $S_{\text{矩形}NFGD}=S_{\triangle ADC}-(S_{\triangle ANF}+S_{\triangle FGC})$ ， $S_{\text{矩形}EBMF}=S_{\triangle ABC}-(\rule{1cm}{0.4pt}+\rule{1cm}{0.4pt})$.

易知， $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$ ， $\rule{1cm}{0.4pt}=\rule{1cm}{0.4pt}$ ， $\rule{1cm}{0.4pt}=\rule{1cm}{0.4pt}$.

可得 $S_{\text{矩形}NFGD}=S_{\text{矩形}EBMF}$.

10. （2017·北京·中考真题）如图，在四边形 ABCD 中，BD 为一条对角线，AD//BC，AD=2BC， $\angle ABD=90^{\circ}$ ，E 为 AD 的中点，连接 BE.

- （1）求证：四边形 BCDE 为菱形；
- （2）连接 AC，若 AC 平分 $\angle BAD$ ，判断 AC 与 CD 的数量关系和位置关系，并说明理由.



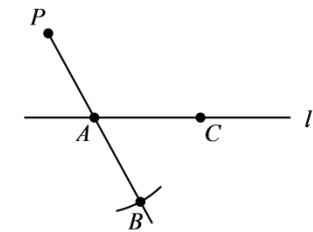
11. （2018·北京·中考真题）下面是小东设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程.

已知：直线及直线外一点 P .



求作： PQ ，使得 $PQ \parallel l$.

作法：如图，



- ①在直线上取一点 A ，作射线 PA ，以点 A 为圆心， AP 长为半径画弧，交 PA 的延长线于点 B ；
- ②在直线上取一点 C （不与点 A 重合），作射线 BC ，以点 C 为圆心， CB 长为半径画弧，交 BC 的延长线于点 Q ；
- ③作直线 PQ .

所以直线 PQ 就是所求作的直线.

根据小东设计的尺规作图过程,

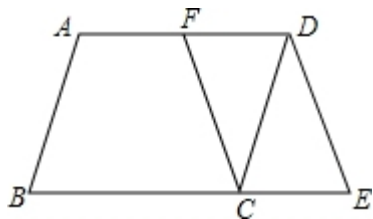
(1) 使用直尺和圆规, 补全图形; (保留作图痕迹)

(2) 完成下面的证明.

证明: $\because AB = \underline{\hspace{2cm}}, CB = \underline{\hspace{2cm}},$

$\therefore PQ \parallel l$ ($\underline{\hspace{2cm}}$) (填推理的依据).

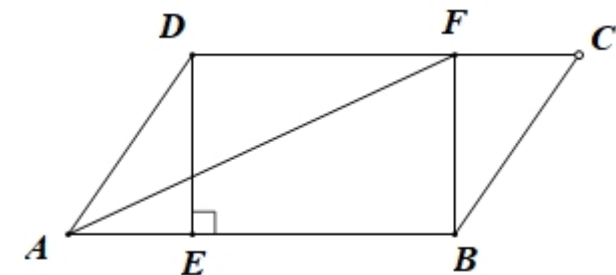
12. (2013·北京·中考真题) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, F 是 AD 的中点, 延长 BC 到点 E , 使 $CE = \frac{1}{2}BC$, 连结 DE , CF .



(1) 求证: 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 若 $AB=4$, $AD=6$, $\angle B=60^\circ$, 求 DE 的长.

13. (2015·北京·中考真题) 在 $\square ABCD$ 中, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 点 F 在边 CD 上, $DF=BE$, 连接 AF , BF .



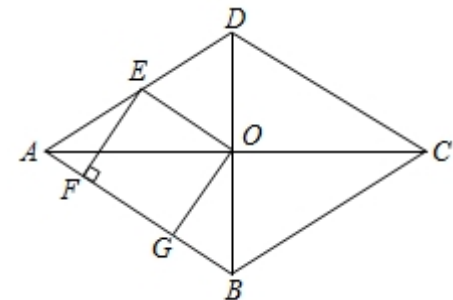
(1) 求证: 四边形 $BFDE$ 是矩形;

(2) 若 $CF=3$, $BF=4$, $DF=5$, 求证: AF 平分 $\angle DAB$.

14. (2020·北京·中考真题) 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , E 是 AD 的中点, 点 F , G 在 AB 上, $EF \perp AB$, $OG \parallel EF$.

(1) 求证: 四边形 $OEFG$ 是矩形;

(2) 若 $AD=10$, $EF=4$, 求 OE 和 BG 的长.



15. (2020·北京·中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC>BC$, D 是 AB 的中点. E 为直线上一动点, 连接 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$, 交直线 BC 于点 F , 连接 EF .

(1) 如图 1, 当 E 是线段 AC 的中点时, 设 $AE = a, BF = b$, 求 EF 的长 (用含 a, b 的式子表示);

(2) 当点 E 在线段 CA 的延长线上时, 依题意补全图 2, 用等式表示线段 AE, EF, BF 之间的数量关系, 并证明.

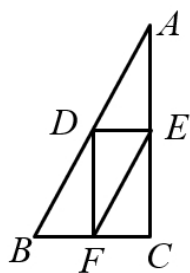


图1

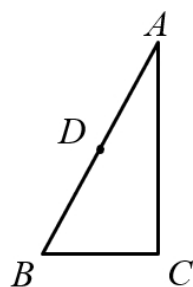
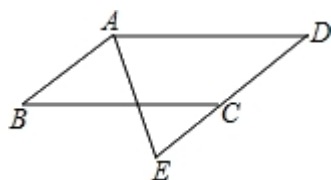


图2

16. (2016·北京·中考真题) 如图, 四边形 ABCD 是平行四边形, AE 平分 $\angle BAD$, 交 DC 的延长线于点 E. 求证: $DA = DE$.



参考答案

1. D

【分析】

根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求得.

【详解】

解: 根据题意可得, $AM=1.2$,

$\because M$ 为中点,

$\therefore AB=2AM=2.4$,

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB=1.2$

故选: D.

【点睛】

题目主要考查直角三角形斜边上的中线的性质, 理解题意, 熟练掌握运用这个性质是解题关键.

2. 20

【分析】

先由 $AB=5$, $AD=12$ 得到 $AC=13$, 然后结合矩形的性质得到 $OB=6.5$, 再结合点 O 和点 M 分别是 AC 和 AD 的中点得到 OM 和 AM 的长, 最后得到四边形 $ABOM$ 的周长.

【详解】

解: $\because AB=5$,

$\therefore CD=5$,

$\square AD=12$, $\angle D=90^\circ$,

$\therefore AC=13$,

$\because$ 点 O 和点 M 分别是 AC 和 AD 的中点,

$\therefore OB=6.5$, $AM=\frac{1}{2}AD=6$, OM 是 $\triangle ACD$ 的中位线,

$\therefore OM=\frac{1}{2}CD=2.5$,

$\therefore C_{\text{四边形}ABOM}=AB+BO+OM+MA=5+6.5+2.5+6=20$.

故答案为: 20.

【点睛】

本题考查了矩形的性质、三角形的中位线定理, 解题的关键是熟知矩形的性质.

3. ①②③

【分析】

根据矩形的判定和性质, 菱形的判定, 正方形的判定, 平行四边形的判定定理即可得到结论.

【详解】

解: ①如图, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 连接 AC , BD 交于 O ,

$\therefore OA=OB=OC=OD$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle OBM = \angle ODP, \angle OAQ = \angle OCN,$$

过点 O 的直线 MP 和 QN , 分别交 AB, BC, CD, AD 于 M, N, P, Q ,

$$\therefore \angle BOM = \angle DOP, \angle AOQ = \angle CON,$$

所以 $\triangle BOM \cong \triangle DOP$ (ASA), $\triangle AOQ \cong \triangle CON$ (ASA),

所以 $OM = OP, OQ = ON$,

则四边形 $MNPQ$ 是平行四边形,

故存在无数个四边形 $MNPQ$ 是平行四边形; 故正确;

②如图, 当 $PM = QN$ 时, 四边形 $MNPQ$ 是矩形, 故存在无数个四边形 $MNPQ$ 是矩形; 故正确;

③如图, 当 $PM \perp QN$ 时, 存在无数个四边形 $MNPQ$ 是菱形; 故正确;

④当四边形 $MNPQ$ 是正方形时, $MQ = PQ$,

则 $\triangle AMQ \cong \triangle DQP$,

$$\therefore AM = QD, AQ = PD,$$

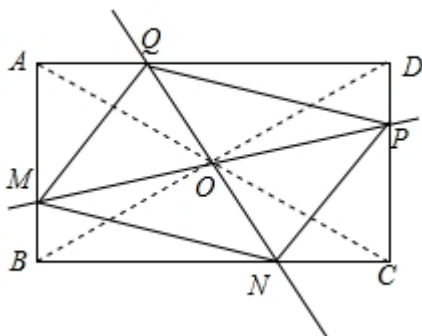
$$\because PD = BM,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

当四边形 $ABCD$ 为正方形时, 四边形 $MNPQ$ 是正方形, 故错误;

故正确结论的序号是①②③.



故答案为: ①②③.

【点睛】

本题考查了矩形的判定和性质, 菱形的判定, 正方形的判定, 平行四边形的判定定理, 熟记各定理是解题的关键.

4. 12

【分析】

由菱形的性质得出 $OA = OC, OB = OD, AC \perp BD$, 设 $OA = x, OB = y$, 由题意得: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, 得出

$AC = 2OA = 6, BD = 2OB = 4$, 即可得出菱形的面积.

【详解】

解: 如图 1 所示:

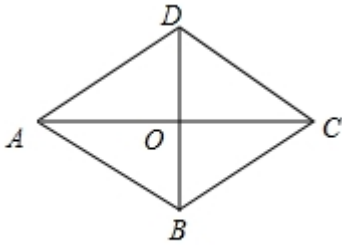


图1

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $OA=OC$, $OB=OD$, $AC \perp BD$,

设 $OA=x$, $OB=y$,

由题意得: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$,

∴ $AC=2OA=6$, $BD=2OB=4$,

∴ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$;

故答案为 12.

【点睛】

本题考查了菱形的性质、正方形的性质、二元一次方程组的应用; 熟练掌握正方形和菱形的性质, 由题意列出方程组是解题的关键.

5. $AF = AE$ (答案不唯一)

【分析】

由题意易得四边形 $AECF$ 是平行四边形, 然后根据菱形的判定定理可进行求解.

【详解】

解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

∴ $AD \parallel BC$,

∴ $AF = EC$,

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

若要添加一个条件使其为菱形, 则可添加 $AF = AE$ 或 $AE = CE$ 或 $CE = CF$ 或 $AF = CF$, 理由: 一组邻边相等的平行四边形是菱形;

故答案为 $AF = AE$ (答案不唯一).

【点睛】

本题主要考查菱形的判定定理、矩形的性质及平行四边形的判定, 熟练掌握菱形的判定定理、矩形的性质及平行四边形的判定是解题的关键.

6. (1) 图形见解析 (2) 25° (3) $EF^2 + FD^2 = 2AB^2$

【分析】

(1) 按照题意补全图形

(2) 连接 AE , 根据轴对称性和正方形的性质可得 $\angle EAD = \angle PAB + \angle PAE = 130^\circ$, 即可求解;

(3) 连接 AE 、 BF 、 BD ，根据轴对称性和正方形的性质可得 $\angle ABF = \angle AEF = \angle ADF$ ，从而得到 $BD = \sqrt{2}AB$ ， $\angle BFD = \angle BAD = 90^\circ$ ，再由勾股定理，即可求解。

【详解】

解：(1) 补全图形如图所示：

(2) 连接 AE ，

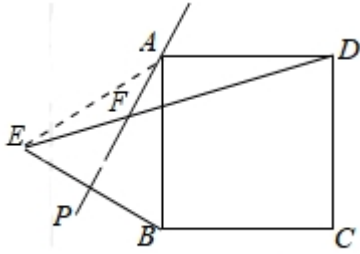


图 1

根据题意得： $\angle PAB = \angle PAE = 20^\circ$ ， $AE = AB = AD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle PAB + \angle PAE = 130^\circ$ ，

$\therefore \angle ADF = \angle AED = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAE) = 25^\circ$ ；

(3) $EF^2 + FD^2 = 2AB^2$ ，理由如下：

连接 AE 、 BF 、 BD ，

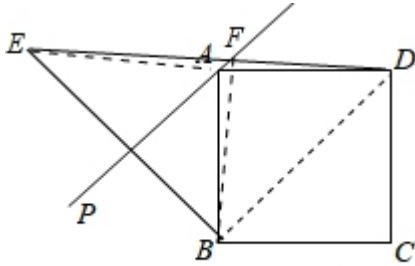


图 2

由轴对称的性质可得： $EF = BF$ ， $AE = AB = AD$ ，

$\therefore \angle BEF = \angle EBF$ ， $\angle AEB = \angle ABE$ ， $\angle AED = \angle ADF$ ，

$\therefore \angle ABF = \angle AEF = \angle ADF$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ$ ， $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2AB^2} = \sqrt{2}AB$ ，

$\therefore \angle ABF + \angle DBF + \angle ADB = \angle DBF + \angle ADB + \angle ADF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BFD = \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore BF^2 + FD^2 = BD^2$

$\therefore EF^2 + FD^2 = 2AB^2$ 。

【点睛】

本题主要考查了轴对称的性质，正方形的性质，勾股定理，等腰三角形的性质，熟练掌握轴对称的性质，正方形的性质，勾股定理，等腰三角形的性质是解题的关键.

7. (1) 证明见解析; (2) $BH = \sqrt{2} AE$, 理由见解析

【分析】

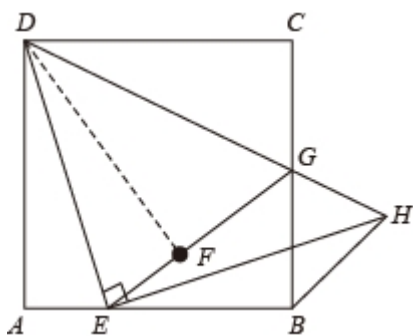
(1) 连接 DF . 根据对称的性质可得 $AD = FD$. $AE = FE$. 证明 $\triangle ADE \cong \triangle FDE$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle DAE = \angle DFE$. 进而证明 $\text{Rt} \triangle DCG \cong \text{Rt} \triangle DFG$, 即可证明;

(2) 在 AD 上取点 M 使得 $AM = AE$ ，连接 ME ．证明 $\triangle DME \cong \triangle EBH$ ，根据等腰直角三角形的性质即可得到线段 BH 与 AE 的数量关系．

【详解】

(1) 证明: 连接 DF .

$\therefore A, F$ 关于 DE 对称.

$$\therefore AD = FD \text{ . } AE = FE \text{ .}$$


在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FDE$ 中

$$\begin{cases} AD = FD \\ AE = FE, \\ DE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FDE ,$$
$$\therefore \angle DAE = \angle DFE .$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle C = 90^\circ. \quad AD = CD,$$
$$\therefore \angle DFE = \angle A = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle DFG = 180^\circ - \angle DFE = 90^\circ,$$
$$\therefore \angle DFG = \angle C \text{ ,}$$
$$\because AD = DF, AD = CD,$$
$$\therefore DF = CD .$$

在 $\text{Rt}\square DCG$ 和 $\text{Rt}\triangle DFG$ 中

$$\begin{cases} DC = DF \\ DG = DG \end{cases}.$$

$$\therefore \text{Rt} \sqcup DCG \cong \text{Rt} \triangle DFG,$$

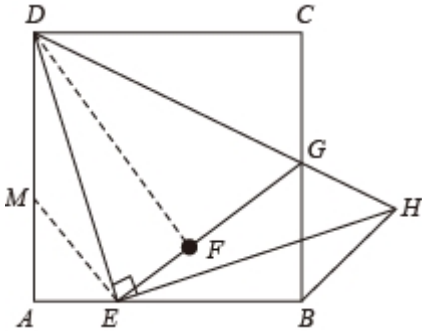
$$\therefore CG = FG .$$

$$(2) BH = \sqrt{2}AE .$$

证明：在 AD 上取点 M 使得 $AM = AE$ ，连接 ME .

$\because$ 四这形 $ABCD$ 是正方形 .

$$\therefore AD = AB , \quad \angle A = \angle ADC = 90^\circ .$$



$$\because \triangle DAE \cong \triangle DFE ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle FDE .$$

同理： $\angle CDG = \angle FDG$,

$$\therefore \angle EDG = \angle EDF + \angle GDF = \frac{1}{2} \angle ADF + \frac{1}{2} \angle CDF = \frac{1}{2} \angle ADC = 45^\circ$$

$$\because DE \perp EH ,$$

$$\therefore \angle DEH = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle EHD = 180^\circ - \angle DEH - \angle EDH = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle EHD = \angle EDH .$$

$$\therefore DE = EH .$$

$$\because \angle A = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AED = 90^\circ .$$

$$\because \angle DEH = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle BEH = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BEH .$$

$$\because AD = AB , \quad AM = AE ,$$

$$\therefore DM = EB .$$

$$\text{在 } \triangle DME \text{ 和 } \triangle EBH \text{ 中 } \begin{cases} DM = EB \\ \angle MDE = \angle BEH , \\ DE = EH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DME \cong \triangle EBH ,$$

$$\therefore ME = BH ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AME$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AE = AM$.

$$\therefore ME = \sqrt{AE^2 + AM^2} = \sqrt{2}AE ,$$

$$\therefore BH = \sqrt{2}AE .$$

【点睛】

本题是四边形的综合题，考查了正方形的性质，轴对称的性质，全等三角形的性质与判定，勾股定理，等腰直角三角形的性质与判定等知识，此题综合性较强，难度较大，注意掌握辅助线的作法，注意数形结合思想的应用．

8. (1) 证明见解析； (2) $\sqrt{2}$

【分析】

(1) 在 $\triangle CAD$ 中，由中位线定理得到 $MN \parallel AD$ ，且 $MN = \frac{1}{2} AD$ ，在 $Rt\triangle ABC$ 中，因为 M 是 AC 的中点，故 $BM = \frac{1}{2} AC$ ，即可得到结论；

(2) 由 $\angle BAD = 60^\circ$ 且 AC 平分 $\angle BAD$ ，得到 $\angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$ ，由 (1) 知， $BM = \frac{1}{2} AC = AM = MC$ ，得到 $\angle BMC = 60^\circ$ ．由平行线性质得到 $\angle NMC = \angle DAC = 30^\circ$ ，故 $\angle BMN = 90^\circ$ ，得到 $BN^2 = BM^2 + MN^2$ ，再由 $MN = BM = 1$ ，得到 BN 的长．

【详解】

(1) 在 $\triangle CAD$ 中， $\because M、N$ 分别是 $AC、CD$ 的中点，

$\therefore MN \parallel AD$ ，且 $MN = \frac{1}{2} AD$ ，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\because M$ 是 AC 的中点，

$\therefore BM = \frac{1}{2} AC$ ，

又 $\because AC = AD$ ，

$\therefore MN = BM$ ；

(2) $\because \angle BAD = 60^\circ$ 且 AC 平分 $\angle BAD$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$ ，

由 (1) 知， $BM = \frac{1}{2} AC = AM = MC$ ，

$\therefore \angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 2\angle BAM = 60^\circ$ ．

$\because MN \parallel AD$ ，

$\therefore \angle NMC = \angle DAC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BMN = \angle BMC + \angle NMC = 90^\circ$ ，

$\therefore BN^2 = BM^2 + MN^2$ ，

而由 (1) 知， $MN = BM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

$\therefore BN = \sqrt{2}$ ．

9. $S_{\triangle AEF}$ ， $S_{\triangle CFM}$ ； $S_{\triangle ANF}$ ， $S_{\triangle AEF}$ ； $S_{\triangle FGC}$ ， $S_{\triangle CFMF}$ ．

【详解】

试题分析：由矩形的对角线的性质，对角线把矩形分成两个面积相等的三角形计算即可．

试题解析：由矩形对角线把矩形分成两个面积相等的两部分可得：

$$S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\triangle ADC} - (S_{\triangle ANF} + S_{\triangle FGC}), S_{\text{矩形}EBMF} = S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AEF} + S_{\triangle FMC}),$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ANF} = S_{\triangle AEF}, S_{\triangle FGC} = S_{\triangle FMC}, \therefore S_{\text{矩形}NFGD} = S_{\text{矩形}EBMF}.$$

10. (1) 证明见解析； (2) AC 与 CD 的数量关系是 $AC = \sqrt{3} CD$ ，位置关系是 $AC \perp CD$ ．

【详解】

试题分析：（1）先证明 $BCDE$ 是平行四边形，再证明一组邻边相等.

(2)连接 AC ,证明 $AD=2CD$,可知 ACD 是 30° 的特殊三角形，勾股定理求 AC 的长.

试题解析：

(1) $\because AD=2BC$, E 为 AD 的中点,

$\therefore DE=BC$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是平行四边形,

$\because \angle ABD=90^\circ$, $AE=DE$,

$\therefore BE=DE$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是菱形.

(2) 解：连接 AC .

$\because AD \parallel BC$, AC 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=\angle BCA$,

$\therefore AB=BC=1$,

$\because AD=2BC=2$,

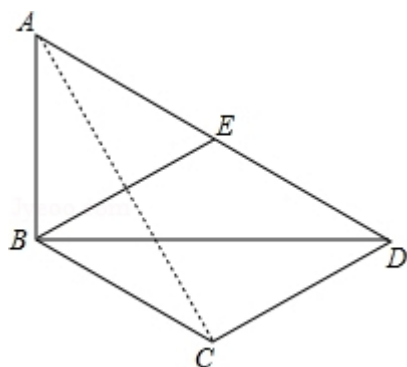
$\therefore \sin \angle ADB=\frac{1}{2}$,

$\therefore \angle ADB=30^\circ$,

$\therefore \angle DAC=30^\circ$, $\angle ADC=60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\because AD=2$,

$\therefore CD=1$, $AC=\sqrt{3}$.

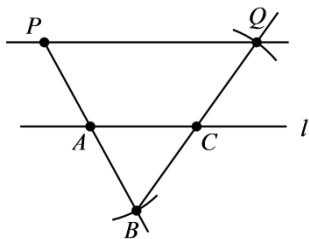


11. (1)作图见解析 (2) PA , CQ , 三角形中位线平行于三角形的第三边.

【详解】

分析：根据作图过程，补全图形即可.

详解：（1）尺规作图如下图所示：



(2) PA , CQ , 三角形中位线平行于三角形的第三边.

点睛: 考查尺规作图, 三角形中位线定理, 熟练掌握三角形的中位线定理是解题的关键.

12. (1) 见解析 (2) $\sqrt{13}$

【分析】

(1) 由“平行四边形的对边平行且相等”的性质推知 $AD \parallel BC$, 且 $AD=BC$; 然后根据中点的定义、结合已知条件推知四边形 $CEDF$ 的对边平行且相等 ($DF=CE$, 且 $DF \parallel CE$), 即四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 如图, 过点 D 作 $DH \perp BE$ 于点 H , 构造含 30 度角的直角 $\triangle DCH$ 和直角 $\triangle DHE$. 通过解直角 $\triangle DCH$ 和在直角 $\triangle DHE$ 中运用勾股定理来求线段 ED 的长度.

【详解】

(1) 证明: 在 $\square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $AD=BC$

$\because F$ 是 AD 的中点

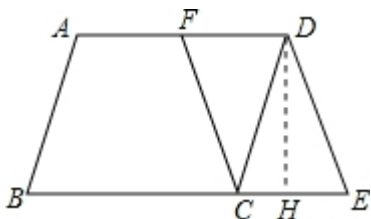
$$\therefore DF = \frac{1}{2} AD$$

$$\text{又} \because CE = \frac{1}{2} BC$$

$$\therefore DF = CE, \text{ 且 } DF \parallel CE$$

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形;

(2) 如图, 过点 D 作 $DH \perp BE$ 于点 H .



在 $\square ABCD$ 中, $\because \angle B = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ.$$

$$\because AB = 4,$$

$$\therefore CD = AB = 4,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2} CD = 2, \quad DH = 2\sqrt{3}.$$

在 $\square CEDF$ 中, $CE = DF = \frac{1}{2} AD = 3$, 则 $EH = 1$.

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle DHE \text{ 中, 根据勾股定理知 } DE = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{13}.$$

13. (1) 见解析 (2) 见解析

【分析】

(1) 根据平行四边形的性质, 可得 AB 与 CD 的关系, 根据平行四边形的判定, 可得 $BFDE$ 是平行四边形, 再根据矩形的判定, 即可证明;

(2) 根据平行线的性质, 可得 $\angle DFA = \angle FAB$, 根据等腰三角形的判定与性质, 可得 $\angle DAF = \angle DFA$, 根据角平分线的判定, 即可证明.

【详解】

(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$.

$\because BE \parallel DF, BE = DF$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形.

$\because DE \perp AB$,

$\therefore \angle DEB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是矩形;

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel DC$,

$\therefore \angle DFA = \angle FAB$.

在 $Rt\triangle BCF$ 中, 由勾股定理, 得

$$BC = \sqrt{FC^2 + FB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\therefore AD = BC = DF = 5$,

$\therefore \angle DAF = \angle DFA$,

$\therefore \angle DAF = \angle FAB$,

即 AF 平分 $\angle DAB$.

【点睛】

本题考查了平行四边形的性质, 矩形的判定, 等腰三角形的判定与性质, 利用等腰三角形的判定与性质得出 $\angle DAF = \angle DFA$ 是解题关键.

14. (1) 见解析; (2) $OE = 5, BG = 2$.

【分析】

(1) 先证明 EO 是 $\triangle DAB$ 的中位线, 再结合已知条件 $OG \parallel EF$, 得到四边形 $OEFG$ 是平行四边形, 再由条件 $EF \perp AB$, 得到四边形 $OEFG$ 是矩形;

(2) 先求出 $AE = 5$, 由勾股定理进而得到 $AF = 3$, 再由中位线定理得到 $OE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AD = 5$, 得到 $FG = 5$, 最后 $BG = AB - AF - FG = 2$.

【详解】

解: (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore$ 点 O 为 BD 的中点,

$\because$ 点 E 为 AD 中点,

$\therefore OE$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore OE \parallel FG,$$

$\because OG \parallel EF$, $\therefore$ 四边形 $OEF G$ 为平行四边形

$\because EF \perp AB$, $\therefore$ 平行四边形 $OEF G$ 为矩形.

(2) $\because$ 点 E 为 AD 的中点, $AD=10$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AD = 5$$

$$\because \angle EFA = 90^\circ, EF=4,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AEF \text{ 中, } AF = \sqrt{AE^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore AB=AD=10,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$\because$ 四边形 $OEF G$ 为矩形,

$$\therefore FG=OE=5,$$

$$\therefore BG=AB-AF-FG=10-3-5=2.$$

故答案为: $OE=5$, $BG=2$.

【点睛】

本题考查了矩形的性质和判定, 菱形的性质、勾股定理等知识点, 解题的关键是掌握特殊四边形的性质和判定属于中考常考题型, 需要重点掌握.

15. (1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; (2) 图见解析, $EF^2 = AE^2 + BF^2$, 证明见解析.

【分析】

(1) 先根据中位线定理和线段中点定义可得 $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2} BC$, $CE = AE = a$, 再根据平行四边形的性质、矩形的判定与性质可得 $DE = CF$, 从而可得 $CF = BF = b$, 然后利用勾股定理即可得;

(2) 如图 (见解析), 先根据平行线的性质可得 $\angle EAD = \angle GBD$, $\angle DEA = \angle DGB$, 再根据三角形全等的判定定理与性质可得 $ED = GD$, $AE = BG$, 然后根据垂直平分线的判定与性质可得 $EF = FG$, 最后在 $Rt\triangle BGF$ 中, 利用勾股定理、等量代换即可得证.

【详解】

(1) $\because D$ 是 AB 的中点, E 是线段 AC 的中点

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 且 $CE = AE = a$

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2} BC$$

$$\because \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - \angle C = 90^\circ$$

$$\because DF \perp DE$$

$$\therefore \angle EDF = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 为矩形

$$\therefore DE = CF$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(BF + CF)$$

$$\therefore CF = BF = b$$

则在 $Rt\triangle CEF$ 中, $EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(2) 过点 B 作 AC 的平行线交 ED 的延长线于点 G, 连接 FG

$$\because BG \parallel AC$$

$$\therefore \angle EAD = \angle GBD, \angle DEA = \angle DGB$$

$\because$ D 是 AB 的中点

$$\therefore AD = BD$$

$$\text{在 } \triangle EAD \text{ 和 } \triangle GBD \text{ 中, } \begin{cases} \angle EAD = \angle GBD \\ \angle DEA = \angle DGB \\ AD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAD \cong \triangle GBD (AAS)$$

$$\therefore ED = GD, AE = BG$$

又 $\because DF \perp DE$

$\therefore$ DF 是线段 EG 的垂直平分线

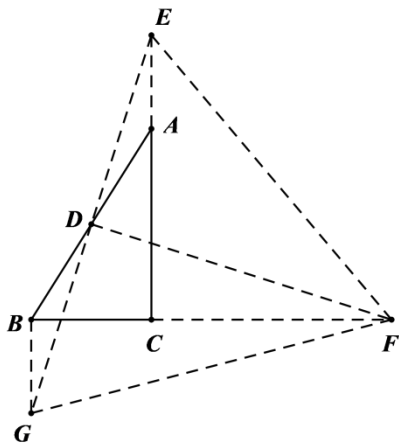
$$\therefore EF = FG$$

$$\because \angle C = 90^\circ, BG \parallel AC$$

$$\therefore \angle GBF = \angle C = 90^\circ$$

在 $Rt\triangle BGF$ 中, 由勾股定理得: $FG^2 = BG^2 + BF^2$

$$\therefore EF^2 = AE^2 + BF^2.$$



【点睛】

本题考查了中位线定理、矩形的判定与性质、三角形全等的判定定理与性质、垂直平分线的判定与性质、勾股定理等知识点, 较难的是题(2), 通过作辅助线, 构造全等三角形和直角三角形是解题关键.

16. 证明见解析.

【分析】

由平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$, 得出内错角相等 $\angle E = \angle BAE$, 再由角平分线证出 $\angle E = \angle DAE$, 即可得出结论.

【详解】

证明：∵ 四边形 ABCD 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$ ，∴ $\angle E = \angle BAE$ ，

∵ AE 平分 $\angle BAD$ ，∴ $\angle BAE = \angle DAE$ ，

∴ $\angle E = \angle DAE$ ，

∴ $DA = DE$.