

2014-2023 北京中考真题数学专项练习

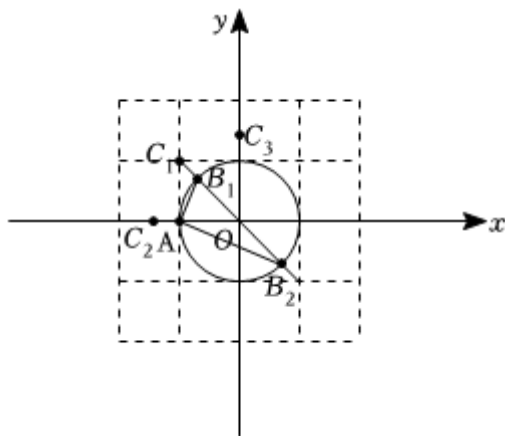
新定义



一、解答题

1. (2023·北京·统考中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1. 对于 $\odot O$ 的弦 AB 和 $\odot O$ 外一点 C 给出如下定义:

若直线 CA , CB 中一条经过点 O , 另一条是 $\odot O$ 的切线, 则称点 C 是弦 AB 的“关联点”.



(1) 如图, 点 $A(-1, 0)$, $B_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

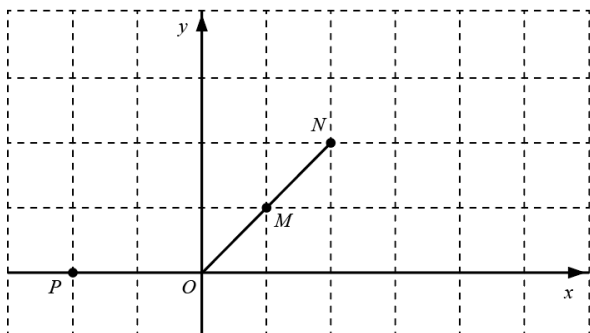
①在点 $C_1(-1, 1)$, $C_2(-\sqrt{2}, 0)$, $C_3(0, \sqrt{2})$ 中, 弦 AB_1 的“关联点”是_____.

②若点 C 是弦 AB_2 的“关联点”, 直接写出 OC 的长;

(2) 已知点 $M(0, 3)$, $N\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$. 对于线段 MN 上一点 S , 存在 $\odot O$ 的弦 PQ , 使得点 S 是弦 PQ 的“关联点”, 记 PQ 的长为 t , 当点 S 在线段 MN 上运动时, 直接写出 t 的取值范围.

2. (2022·北京·统考中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $M(a, b)$, N . 对于点 P 给出如下定义: 将点 P 向右 ($a \geq 0$) 或向左 ($a < 0$) 平移 $|a|$ 个单位长度, 再向上 ($b \geq 0$) 或向下 ($b < 0$) 平移 $|b|$ 个单位长度, 得到点 P' , 点 P' 关于点 N 的对称点为 Q , 称点 Q 为点 P 的“对应点”.

(1) 如图, 点 $M(1, 1)$, 点 N 在线段 OM 的延长线上, 若点 $P(-2, 0)$, 点 Q 为点 P 的“对应点”.

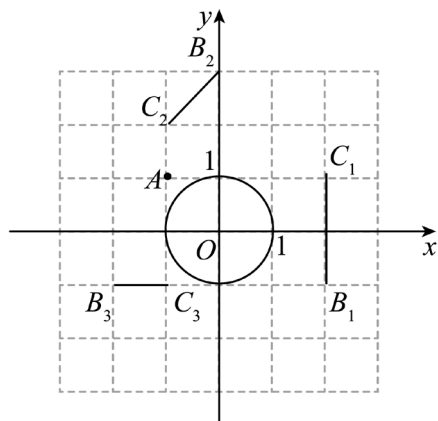


①在图中画出点 Q ;

②连接 PQ , 交线段 ON 于点 T . 求证: $NT = \frac{1}{2}OM$;

(2) $\odot O$ 的半径为 1, M 是 $\odot O$ 上一点, 点 N 在线段 OM 上, 且 $ON = t (\frac{1}{2} < t < 1)$, 若 P 为 $\odot O$ 外一点, 点 Q 为点 P 的“对应点”, 连接 PQ . 当点 M 在 $\odot O$ 上运动时直接写出 PQ 长的最大值与最小值的差 (用含 t 的式子表示).

3. (2021·北京·统考中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, 对于点 A 和线段 BC , 给出如下定义: 若将线段 BC 绕点 A 旋转可以得到 $\odot O$ 的弦 $B'C'$ (B', C' 分别是 B, C 的对应点), 则称线段 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”.

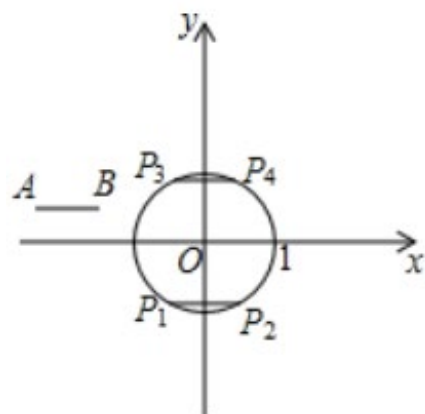


(1) 如图, 点 $A, B_1, C_1, B_2, C_2, B_3, C_3$ 的横、纵坐标都是整数. 在线段 B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 中, $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”是_____;

(2) $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 $A(0, t)$, 其中 $t \neq 0$. 若 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 求 t 的值;

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=1, AC=2$. 若 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 直接写出 OA 的最小值和最大值, 以及相应的 BC 长.

4. (2020·北京·统考中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, A, B 为 $\odot O$ 外两点, $AB=1$. 给出如下定义: 平移线段 AB , 得到 $\odot O$ 的弦 $A'B'$ (A', B' 分别为点 A, B 的对应点), 线段 AA' 长度的最小值称为线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”.

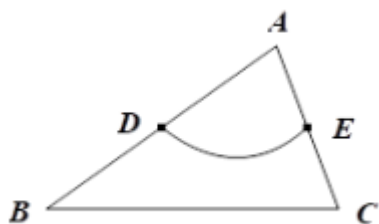


(1) 如图, 平移线段 AB 到 $\odot O$ 的长度为 1 的弦 P_1P_2 和 P_3P_4 , 则这两条弦的位置关系是_; 在点 P_1, P_2, P_3, P_4 中, 连接点 A 与点_的线段的长度等于线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”;

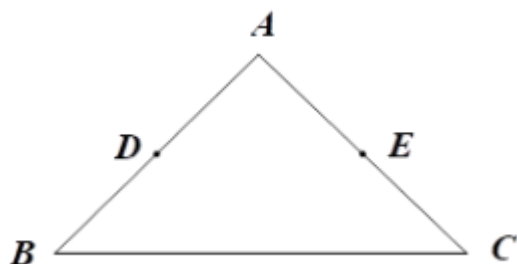
(2) 若点 A, B 都在直线 $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上, 记线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”为 d_1 , 求 d_1 的最小值;

(3) 若点 A 的坐标为 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$, 记线段 AB 到 $\odot O$ 的“平移距离”为 d_2 , 直接写出 d_2 的取值范围.

5. (2019·北京·中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 $\square ABC$ 两边的中点, 如果 $\widehat{DE}$ 上的所有点都在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 则称 $\widehat{DE}$ 为 $\triangle ABC$ 的中内弧. 例如, 下图中 $\widehat{DE}$ 是 $\triangle ABC$ 的一条中内弧.



(1) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, D, E 分别是 AB, AC 的中点. 画出 $\triangle ABC$ 的最长的中内弧 $\widehat{DE}$, 并直接写出此时 $\widehat{DE}$ 的长;



(2) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(4t, 0) (t > 0)$, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点.

①若 $t = \frac{1}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的中内弧 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 的纵坐标的取值范围;

②若在 $\triangle ABC$ 中存在一条中内弧 $\widehat{DE}$, 使得 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 直接写出 t 的取值范围.

6. (2018·北京·统考中考真题) 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M, N , 给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, Q 为图形 N 上任意一点, 如果 P, Q 两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形 M, N 间的“闭距离”, 记作 $d(M, N)$.

已知点 $A(-2, 6)$, $B(-2, -2)$, $C(6, -2)$.

(1) 求 $d(\text{点 } O, \square ABC)$;

(2) 记函数 $y = kx$ ($-1 \leq x \leq 1, k \neq 0$) 的图象为图形 G , 若 $d(G, \square ABC) = 1$, 直接写出 k 的取值范围;

(3) $\square T$ 的圆心为 $T(t, 0)$, 半径为 1. 若 $d(\square T, \square ABC) = 1$, 直接写出 t 的取值范围.

7. (2017·北京·中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 M , 给出如下的定义: 若在图形 M 存在一点 Q , 使得 P, Q 两点间的距离小于或等于 1, 则称 P 为图形 M 的关联点.

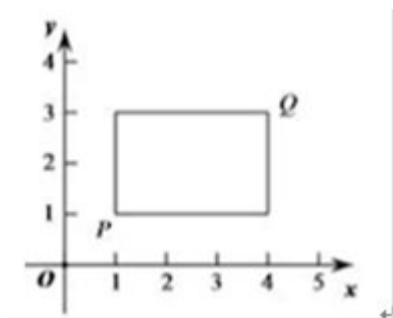
(1) 当 $\odot O$ 的半径为 2 时,

①在点 $P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right), P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_3\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 中, $\odot O$ 的关联点是_____.

②点 P 在直线 $y=-x$ 上, 若 P 为 $\odot O$ 的关联点, 求点 P 的横坐标的取值范围.

(2) $\odot C$ 的圆心在 x 轴上, 半径为 2, 直线 $y=-x+1$ 与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B . 若线段 AB 上的所有点都是 $\odot C$ 的关联点, 直接写出圆心 C 的横坐标的取值范围.

8. (2016·北京·中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 Q 的坐标为 (x_2, y_2) , 且 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$, 若 P, Q 为某个矩形的两个顶点, 且该矩形的边均与某条坐标轴垂直, 则称该矩形为点 P, Q 的“相关矩形”. 下图为点 P, Q 的“相关矩形”的示意图.



(1) 已知点 A 的坐标为 $(1, 0)$.

①若点 B 的坐标为 $(3, 1)$ 求点 A, B 的“相关矩形”的面积;

②点 C 在直线 $x=3$ 上, 若点 A, C 的“相关矩形”为正方形, 求直线 AC 的表达式;

(2) $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$, 点 M 的坐标为 $(m, 3)$. 若在 $\odot O$ 上存在一点 N , 使得点 M, N 的“相关矩形”为正方形, 求 m 的取值范围.

9. (2015·北京·统考中考真题) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的半径为 r , P 是与圆心 C 不重合的点, 点 P 关于 $\odot C$ 的反称点的定义如下: 若在射线 CP 上存在一点 P' , 满足 $CP+CP'=2r$, 则称 P' 为点 P 关于 $\odot C$ 的反称点, 如图为点 P 及其关于 $\odot C$ 的反称点 P' 的示意图.

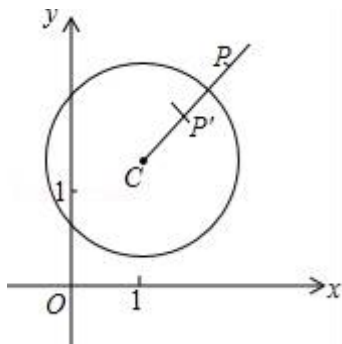
特别地, 当点 P' 与圆心 C 重合时, 规定 $CP'=0$.

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 1 时.

①分别判断点 $M(2, 1), N\left(\frac{3}{2}, 0\right), T(1, \sqrt{3})$ 关于 $\odot O$ 的反称点是否存在? 若存在, 求其坐标;

②点 P 在直线 $y=-x+2$ 上, 若点 P 关于 $\odot O$ 的反称点 P' 存在, 且点 P' 不在 x 轴上, 求点 P 的横坐标的取值范围;

(2) $\odot C$ 的圆心在 x 轴上, 半径为 1, 直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B , 若线段 AB 上存在点 P , 使得点 P 关于 $\odot C$ 的反称点 P' 在 $\odot C$ 的内部, 求圆心 C 的横坐标的取值范围.



参考答案

1. (1) $C_1, C_2; OC = \sqrt{2}$

(2) $1 \leq t \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3} \leq t \leq \sqrt{3}$.

【分析】(1) 根据题目中关联点的定义并分情况讨论计算即可；

(2) 根据 $M(0,3), N\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$ 两点来求最值情况， S 共有 2 种情况，分别位于点 M 和经过点 O 的 MN 的垂线上，运用相似三角形计算即可。

【详解】(1) 解：①由关联点的定义可知，若直线 CA, CB 中一经过点 O ，另一条是 $\odot O$ 的切线，则称点 C 是弦 AB 的“关联点”，

$\because$ 点 $A(-1,0), B_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), C_1(-1,1), C_2(-\sqrt{2}, 0), C_3(0, \sqrt{2})$,

$\therefore$ 直线 B_1C_2 经过点 O ，且 AC_2 与 $\odot O$ 相切，

$\therefore C_2$ 是弦 AB_1 的“关联点”，

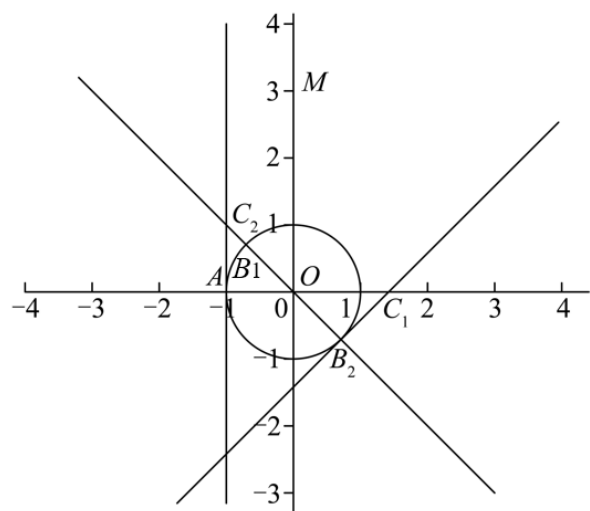
又 $\because C_1(-1,1)$ 和 $A(-1,0)$ 横坐标相等，与 $B_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 都位于直线 $y = -x$ 上，

$\therefore AC_1$ 与 $\odot O$ 相切， B_1C_1 经过点 O ，

$\therefore C_1$ 是弦 AB_1 的“关联点”。

② $\because A(-1,0), B_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

设 $C(a, b)$ ，如下图所示，共有两种情况，



a、若 C_1B_2 与 $\odot O$ 相切， AC 经过点 O ，

则 C_1B_2, AC_1 所在直线为：
$$\begin{cases} y = x - \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases},$$

解得: $C_1(\sqrt{2}, 0)$,

$$\therefore OC_1 = \sqrt{2},$$

b、若 AC_2 与 $\odot O$ 相切, C_2B_2 经过点 O ,

$$\text{则 } C_2B_2、AC_2 \text{ 所在直线为: } \begin{cases} x = -1 \\ y = -x \end{cases},$$

解得: $C_2(-1, 1)$,

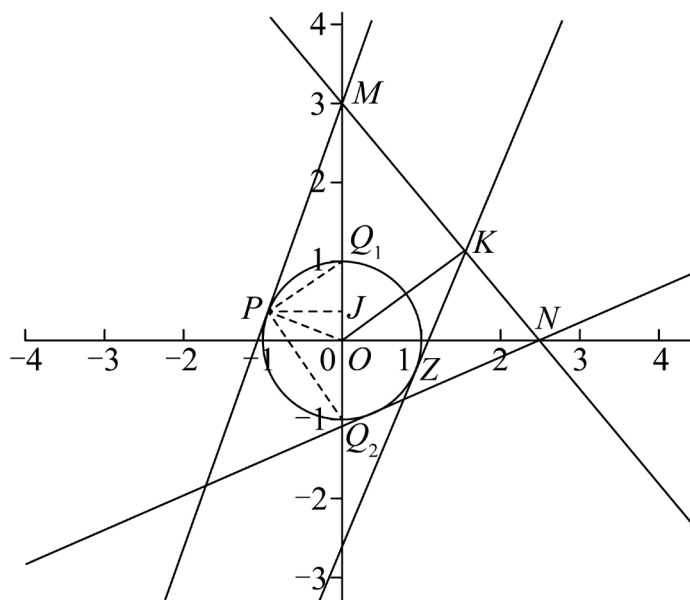
$$\therefore OC_2 = \sqrt{2},$$

综上, $OC = \sqrt{2}$.

(2) 解: $\because$ 线段 MN 上一点 S , 存在 $\odot O$ 的弦 PQ , 使得点 S 是弦 PQ 的“关联点”,

又 $\because$ 弦 PQ 随着 S 的变动在一定范围内变动, 且 $M(0, 3)$, $N\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$, $OM > ON$,

$\therefore S$ 共有 2 种情况, 分别位于点 M 和经过点 O 的 MN 的垂线上, 如图所示,



①当 S 位于点 $M(0, 3)$ 时, MP 为 $\odot O$ 的切线, 作 $PJ \perp OM$,

$\because M(0, 3)$, $\odot O$ 的半径为 1, 且 MP 为 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OP \perp MP,$$

$$\because PJ \perp OM,$$

$$\therefore \triangle MPO \sim \triangle POJ,$$

$$\therefore \frac{OP}{OJ} = \frac{OM}{OP}, \text{ 即 } \frac{1}{OJ} = 3,$$

$$\text{解得 } OJ = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得, } PJ = \sqrt{PO^2 - OJ^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad Q_1J = \frac{2}{3}$$

根据勾股定理, $PQ_1 = \sqrt{Q_1P^2 + Q_1J^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 同理, $PQ_2 = \sqrt{Q_2P^2 + Q_2J^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore$ 当 S 位于点 $M(0,3)$ 时, PQ_1 的临界值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 和 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

②当 S 位于经过点 O 的 MN 的垂直平分线上即点 K 时,

$\therefore$ 点 $M(0,3)$, $N\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0\right)$,

$\therefore MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore OK = OM \times ON \div MN = 2$,

又 $\because \odot O$ 的半径为 1, $\therefore \angle OKZ = 30^\circ$,

$\therefore$ 三角形 OPQ 为等边三角形,

$\therefore$ 在此情况下, $PQ = 1$, $PQ = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 当 S 位于经过点 O 的 MN 的垂直平分线上即点 K 时, PQ_1 的临界值为 1 和 $\sqrt{3}$,

$\therefore$ 在两种情况下, PQ 的最小值在 $1 \leq t \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 内, 最大值在 $\frac{2\sqrt{6}}{3} \leq t \leq \sqrt{3}$,

综上所述, t 的取值范围为 $1 \leq t \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3} \leq t \leq \sqrt{3}$,

【点睛】 本题主要考查最值问题, 题目较为新颖, 要灵活运用知识点, 明确新概念时解答此题的关键.

2. (1) 见解析

(2) $4t - 2$

【分析】 (1) ①先根据定义和 $M(1,1)$ 求出点 P' 的坐标, 再根据点 P' 关于点 N 的对称点为 Q 求出点 Q 的坐标; ②延长 ON 至点 $A(3,3)$, 连接 AQ , 利用 AAS 证明 $\triangle AQT \cong \triangle OPT$, 得到 $TA = TO = \frac{1}{2}OA$, 再计算出

OA , OM , ON 即可求出 $NT = ON - OT = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}OM$;

(2) 连接 PO 并延长至 S , 使 $OP = OS$, 延长 SQ 至 T , 使 $ST = OM$, 结合对称的性质得出 NM 为 $\triangle P'QT$ 的中位线, 推出 $NM = \frac{1}{2}QT$, 得出 $SQ = ST - TQ = 1 - (2 - 2t) = 2t - 1$, 则

$PQ_{\max} - PQ_{\min} = (PS + QS) - (PS - QS) = 2QS$.

【详解】 (1) 解: ①点 Q 如下图所示.

$\therefore$ 点 $M(1,1)$,

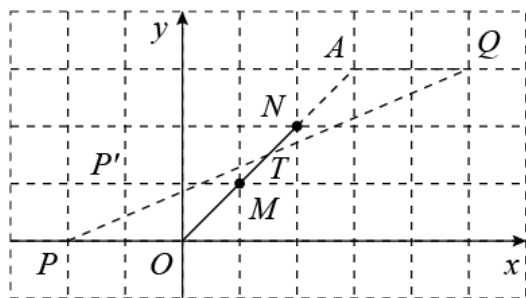
$\therefore$ 点 $P(-2,0)$ 向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度, 得到点 P' ,

$\therefore P'(-1,1)$,

$\therefore$ 点 P' 关于点 N 的对称点为 Q , $N(2,2)$,

$\therefore$ 点 Q 的横坐标为: $2 \times 2 - (-1) = 5$, 纵坐标为: $2 \times 2 - 1 = 3$,

∴点 $Q(5,3)$ ，在坐标系内找出该点即可；



②证明：如图延长 ON 至点 $A(3,3)$ ，连接 AQ ，

$$\because AQ \parallel OP,$$

$$\therefore \angle AQT = \angle OPT,$$

在 $\triangle AQT$ 与 $\triangle OPT$ 中，

$$\begin{cases} \angle AQT = \angle OPT \\ \angle ATQ = \angle OTP, \\ AQ = OP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AQT \cong \triangle OPT (AAS),$$

$$\therefore TA = TO = \frac{1}{2}OA,$$

$$\because A(3,3), M(1,1), N(2,2),$$

$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, ON = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore TO = \frac{1}{2}OA = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore NT = ON - OT = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

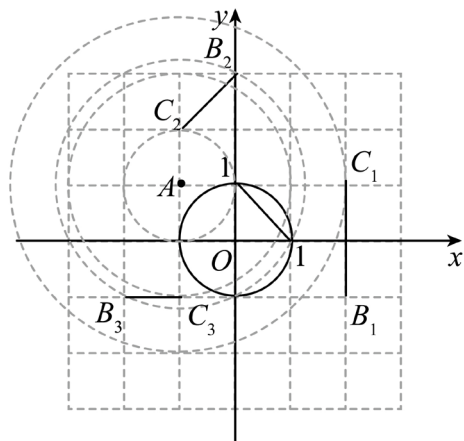
$$\therefore NT = \frac{1}{2}OM;$$

(2) 解：如图所示，

(2) 由旋转的性质可得 $\triangle AB'C'$ 是等边三角形, 且 $B'C'$ 是 $\odot O$ 的弦, 进而画出图象, 则根据等边三角形的性质可进行求解;

(3) 由 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 则可知 B', C' 都在 $\odot O$ 上, 且 $AB' = AB = 1, AC' = AC = 2$, 然后由题意可根据图象来进行求解即可.

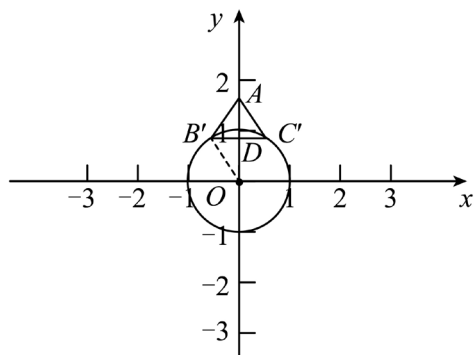
【详解】解: (1) 由题意得:



通过观察图象可得: 线段 B_2C_2 能绕点 A 旋转 90° 得到 $\odot O$ 的“关联线段”, B_1C_1, B_3C_3 都不能绕点 A 进行旋转得到;

故答案为 B_2C_2 ;

(2) 由题意可得: 当 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”时, 则有 $\triangle AB'C'$ 是等边三角形, 且边长也为 1, 当点 A 在 y 轴的正半轴上时, 如图所示:



设 $B'C'$ 与 y 轴的交点为 D , 连接 OB' , 易得 $B'C' \perp y$ 轴,

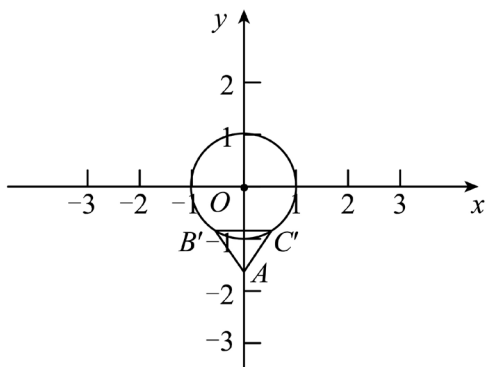
$$\therefore B'D = DC' = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OD = \sqrt{OB'^2 - B'D^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad AD = \sqrt{AB'^2 - B'D^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OA = \sqrt{3},$$

$$\therefore t = \sqrt{3};$$

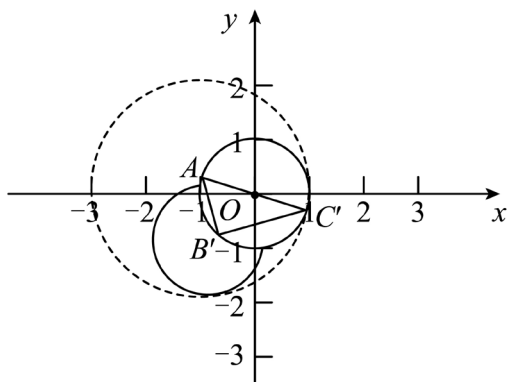
当点 A 在 y 轴的正半轴上时, 如图所示:



同理可得此时的 $OA = \sqrt{3}$,

$$\therefore t = -\sqrt{3};$$

(3) 由 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”, 则可知 B', C' 都在 $\odot O$ 上, 且 $AB' = AB = 1, AC' = AC = 2$, 则有当以 B' 为圆心, 1 为半径作圆, 然后以点 A 为圆心, 2 为半径作圆, 即可得到点 A 的运动轨迹, 如图所示:



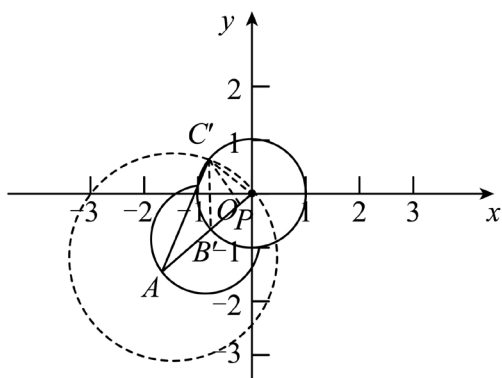
由运动轨迹可得当点 A 也在 $\odot O$ 上时为最小, 最小值为 1, 此时 AC' 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle AB'C' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'B' = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = B'C' = AC' \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3};$$

由以上情况可知当点 A, B', O 三点共线时, OA 的值为最大, 最大值为 2, 如图所示:



连接 $OC', B'C'$, 过点 C' 作 $C'P \perp OA$ 于点 P ,

$$\therefore OC' = 1, AC' = OA = 2,$$

设 $OP = x$, 则有 $AP = 2 - x$,

∴由勾股定理可得： $C'P^2 = AC'^2 - AP^2 = OC'^2 - OP^2$ ，即 $2^2 - (2-x)^2 = 1-x^2$ ，

解得： $x = \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore C'P = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore B'P = OB' - OP = \frac{3}{4},$$

在 $Rt\triangle B'PC'$ 中， $B'C' = \sqrt{B'P^2 + C'P^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

$$\therefore BC = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

综上所述：当 $OA_{\min} = 1$ 时，此时 $BC = \sqrt{3}$ ；当 $OA_{\max} = 2$ 时，此时 $BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

【点睛】本题主要考查旋转的综合、圆的基本性质、三角函数及等边三角形的性质，熟练掌握旋转的性质、圆的基本性质、三角函数及等边三角形的性质是解题的关键。

$$4. (1) \text{ 平行, } P_3; (2) \frac{\sqrt{3}}{2}; (3) \frac{3}{2} \leq d_2 \leq \frac{\sqrt{39}}{2}$$

【分析】(1) 根据圆的性质及“平移距离”的定义填空即可；

(2) 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，交弦 CD 于点 F，分别求出 OE、OF 的长，由 $d_1 = OE - OF$ 得到 d_1 的最小值；

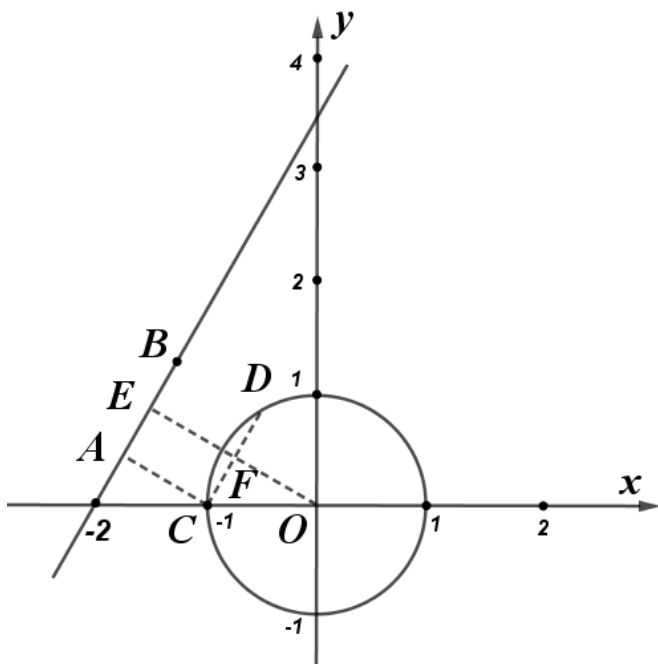
(3) 线段 AB 的位置变换，可以看作是以点 $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 为圆心，半径为 1 的圆，只需在 $\odot O$ 内找到与之平行，且长度为 1 的弦即可。平移距离 d_2 的最大值即点 A，B 点的位置，由此得出 d_2 的取值范围。

【详解】解：(1) 平行； P_3 ；

(2) 如图，线段 AB 在直线 $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上，平移之后与圆相交，得到的弦为 CD， $CD \parallel AB$ ，过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E，交弦 CD 于点 F， $OF \perp CD$ ，令 $y = 0$ ，直线与 x 轴交点为 $(-2, 0)$ ，直线与 x 轴夹角为 60° ， $\therefore OE = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ 。

由垂径定理得： $OF = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

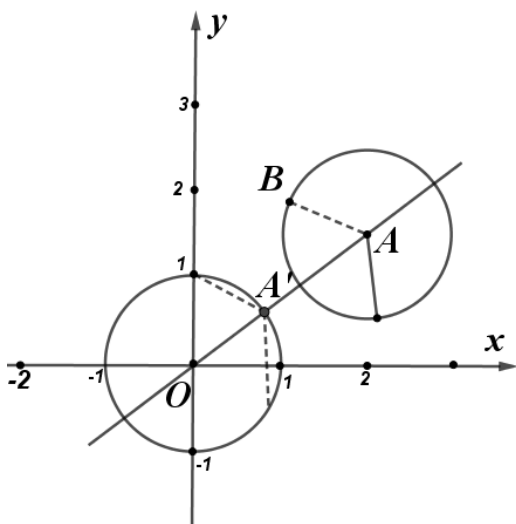
$$\therefore d_1 = OE - OF = \frac{\sqrt{3}}{2};$$



(3) 线段 AB 的位置变换, 可以看作是以点 $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 1 的圆, 只需在 $\odot O$ 内找到与之平行, 且长度为 1 的弦即可;

点 A 到 O 的距离为 $AO = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$.

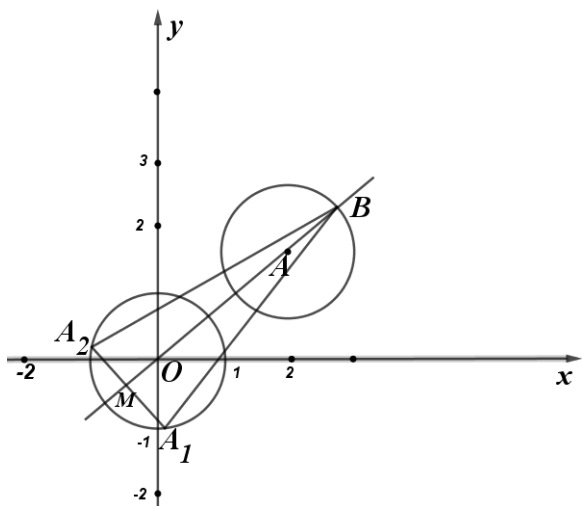
如图, 平移距离 d_2 的最小值即点 A 到 $\odot O$ 的最小值: $\frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$;



平移距离 d_2 的最大值线段是下图 AB 的情况, 即当 A_1, A_2 关于 OA 对称, 且 $A_1B_2 \perp A_1A_2$ 且 $A_1B_2=1$ 时, $\angle B_2A_2A_1=60^\circ$, 则 $\angle OA_2A_1=30^\circ$,

$$\because OA_2=1, \therefore OM=\frac{1}{2}, A_2M=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore MA=3, AA_2=\sqrt{3^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{2},$$



$\therefore d_2$ 的取值范围为: $\frac{3}{2} \leq d_2 \leq \frac{\sqrt{39}}{2}$.

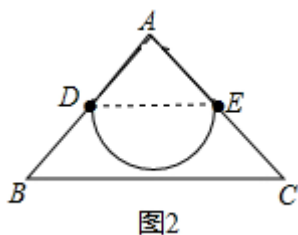
【点睛】本题考查圆的基本性质及与一次函数的综合运用, 熟练掌握圆的基本性质、点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系是解题的关键.

5. (1) π ; (2) ①P 的纵坐标 $y_P \geq 1$ 或 $y_P \leq \frac{1}{2}$; ② $0 < t \leq \sqrt{2}$.

【分析】(1) 由三角函数值及等腰直角三角形性质可求得 $DE=2$, 最长中内弧即以 DE 为直径的半圆, $\widehat{DE}$ 的长即以 DE 为直径的圆周长的一半;

(2) 根据三角形中内弧定义可知, 圆心一定在 DE 的中垂线上, ①当 $t = \frac{1}{2}$ 时, 要注意圆心 P 在 DE 上方的中垂线上均符合要求, 在 DE 下方时必须 AC 与半径 PE 的夹角 $\angle AEP$ 满足 $90^\circ \leq \angle AEP < 135^\circ$; ②根据题意, t 的最大值即圆心 P 在 AC 上时求得的 t 值.

【详解】解: (1) 如图 2,

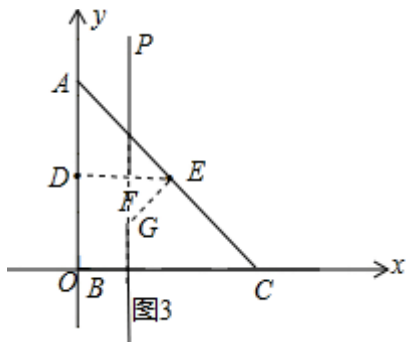


以 DE 为直径的半圆弧 $\widehat{DE}$, 就是 $\triangle ABC$ 的最长的中内弧 $\widehat{DE}$, 连接 DE , $\because \angle A=90^\circ$, $AB=AC=2\sqrt{2}$,

D, E 分别是 AB, AC 的中点, $\therefore BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 4, DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$,

$\therefore$ 弧 $\widehat{DE} = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$;

(2) 如图 3, 由垂径定理可知, 圆心一定在线段 DE 的垂直平分线上, 连接 DE , 作 DE 垂直平分线 FP , 作 $EG \perp AC$ 交 FP 于 G ,



①当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $C(2, 0)$, $\therefore D(0, 1)$, $E(1, 1)$, $F\left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

设 $P\left(\frac{1}{2}, m\right)$ 由三角形中内弧定义可知, 圆心线段 DE 上方射线 FP 上均可, $\therefore m \geq 1$,

$\because OA = OC$, $\angle AOC = 90^\circ$

$\therefore \angle ACO = 45^\circ$,

$\because DE \parallel OC$

$\therefore \angle AED = \angle ACO = 45^\circ$

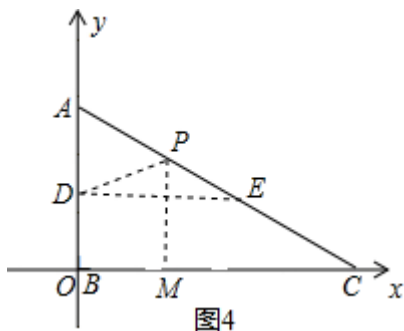
作 $EG \perp AC$ 交直线 FP 于 G, $FG = EF = \frac{1}{2}$

根据三角形中内弧的定义可知, 圆心在点 G 的下方 (含点 G) 直线 FP 上也符合要求;

$\therefore m \geq \frac{1}{2}$

综上所述, $m \geq \frac{1}{2}$ 或 $m \geq 1$.

②图 4, 设圆心 P 在 AC 上,



$\because P$ 在 DE 中垂线上,

$\therefore P$ 为 AE 中点, 作 $PM \perp OC$ 于 M, 则 $PM = \frac{3}{2}$

$\therefore P\left(t, \frac{3}{2}\right)$,

$\because DE \parallel BC$

$\therefore \angle ADE = \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{4t^2 + 1}$

$$\because PD=PE,$$

$$\therefore \angle AED=\angle PDE$$

$$\because \angle AED+\angle DAE=\angle PDE+\angle ADP=90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE=\angle ADP$$

$$\therefore AP=PD=PE=\frac{1}{2}AE$$

由三角形中内弧定义知， $PD\leq PM$

$$\therefore \frac{1}{2}AE\leq \frac{3}{2}, AE\leq 3, \text{ 即 } \sqrt{4t^2+1}\leq 3, \text{ 解得: } t\leq \sqrt{2}$$

$$\because t>0$$

$$\therefore 0<t\leq \sqrt{2}$$

【点睛】此题是一道圆的综合题，考查了圆的性质，弧长计算，直角三角形性质等，给出了“三角形中内弧”新定义，要求学生能够正确理解新概念，并应用新概念解题.

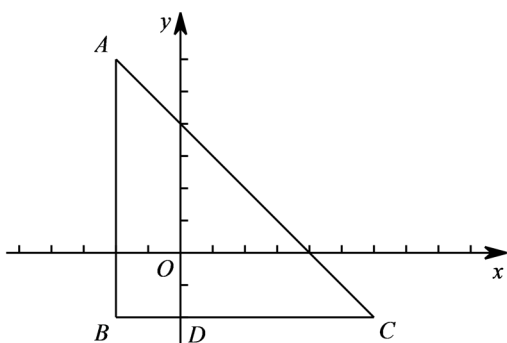
$$6. (1) 2; (2) -1\leq k<0 \text{ 或 } 0<k\leq 1; (3) t=-4 \text{ 或 } 0\leq t\leq 4-2\sqrt{2} \text{ 或 } t=4+2\sqrt{2}.$$

【详解】分析：(1) 画出图形，根据“闭距离”的概念结合图形进行求解即可.

(2) 分 $k<0$ 和 $k>0$ 两种情况，画出示意图，即可解决问题.

(3) 画出图形，直接写出 t 的取值范围.

详解：(1) 如下图所示：

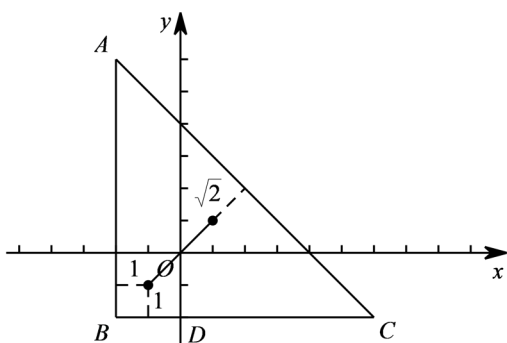
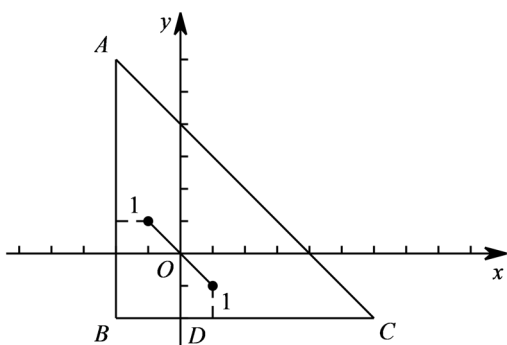


$$\because B(-2, -2), C(6, -2)$$

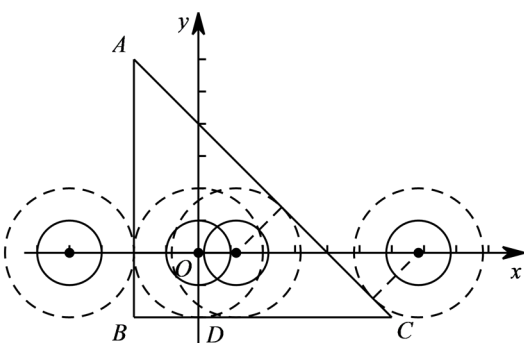
$$\therefore D(0, -2)$$

$$\therefore d(O, \triangle ABC) = OD = 2$$

$$(2) -1\leq k<0 \text{ 或 } 0<k\leq 1$$



(3) $t = -4$ 或 $0 \leq t \leq 4 - 2\sqrt{2}$ 或 $t = 4 + 2\sqrt{2}$.



点睛：属于新定义问题，考查点到直线的距离，圆的切线的性质，认真分析材料，读懂“闭距离”的概念是解题的关键.

7. (1) ① P_2, P_3 , ② $-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$; (2) $-2 \leq x \leq 1$ 或 $2 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

【详解】试题分析：(1) ①由题意得，P 只需在以 O 为圆心，半径为 1 和 3 两圆之间即可，由 OP_2, OP_3 的值可知 P_2, P_3 为 $\odot O$ 的关联点；②满足条件的 P 只需在以 O 为圆心，半径为 1 和 3 两圆之间即可，所以 P

横坐标范围是 $-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

(2). 分四种情况讨论即可，当圆过点 A， $CA=3$ 时；当圆与小圆相切时；当圆过点 A， $AC=1$ 时；当圆过点 B 时，即可得出.

试题解析：

$$(1) OP_1 = \frac{1}{2}, OP_2 = 1, OP_3 = \frac{5}{2},$$

点 P_1 与 $\odot$ 的最小距离为 $\frac{3}{2}$ ，点 P_2 与 $\odot$ 的最小距离为 1，点 P_3 与 $\odot$ 的最小距离为 $\frac{1}{2}$ ，

$\therefore \odot$ 的关联点为 P_2 和 P_3 。

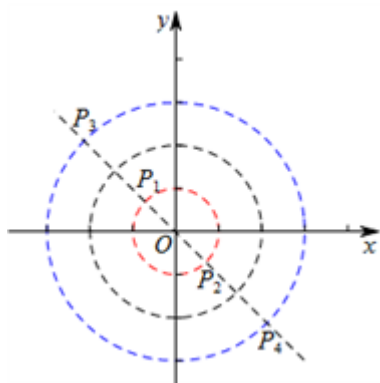
②根据定义分析，可得当直线 $y=-x$ 上的点 P 到原点的距离在 1 到 3 之间时符合题意；

$\therefore$ 设点 P 的坐标为 $P(x, -x)$ ，□

当 $OP=1$ 时，由距离公式可得， $OP = \sqrt{(x-0)^2 + (-x-0)^2} = 1$ ，解得 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，当 $OP=3$ 时，由距离公式可

得， $OP = \sqrt{(x-0)^2 + (-x-0)^2} = 3$ ， $x^2 + x^2 = 9$ ，解得 $x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore$ 点的横坐标的取值范围为 $-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$



(2) $\because y = -x + 1$ 与轴、轴的交点分别为 A、B 两点， $\therefore$ 令 $y=0$ 得， $-x+1=0$ ，解得 $x=1$ ，□

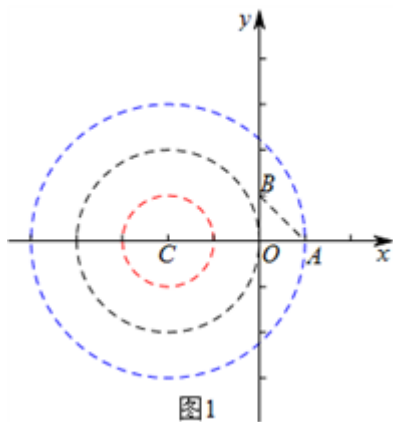
令得 $x=0$ 得， $y=0$ ，

$\therefore A(1, 0)$ ， $B(0, 1)$ ，

分析得：

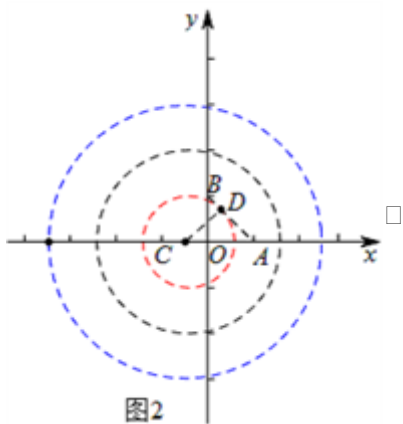
如图 1，当圆过点 A 时，此时 $CA=3$ ，

$\therefore$ 点 C 坐标为， $C(-2, 0)$ □



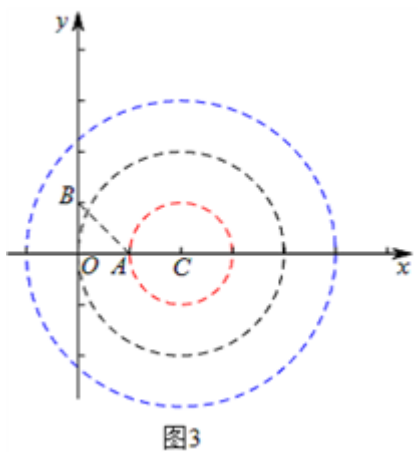
如图 2，当圆与小圆相切时，切点为 D，

$\therefore CD=1$ ，

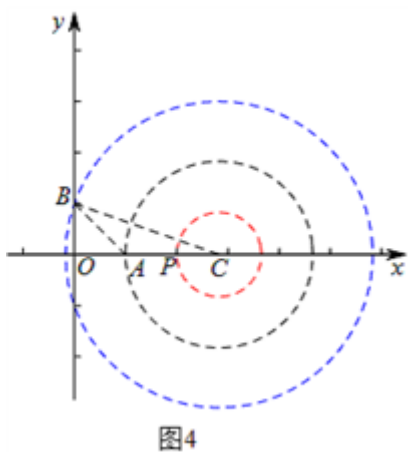


又 $\because$ 直线 AB 所在的函数解析式为 $y=-x+1$ ，
 $\therefore$ 直线 AB 与 x 轴形成的夹角是 45° ，
 $\therefore$ RT $\triangle$ ACD 中， $CA=\sqrt{2}$ ，
 $\therefore$ C 点坐标为 $(1-\sqrt{2}, 0)$
 $\therefore$ C 点的横坐标的取值范围为： $-2 \leq x_c \leq 1-\sqrt{2}$ ，

如图 3，当圆过点 A 时， $AC=1$ ，
 C 点坐标为 $(2, 0)$



如图 4，
 当圆过点 B 时，连接 BC，此时 $BC=3$ ，
 在 Rt $\triangle$ OCB 中，由勾股定理得 $OC=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$ ， C 点坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$ 。



$\therefore C$ 点的横坐标的取值范围为 $2 \leq x_c \leq 2\sqrt{2}$;

$\therefore$ 综上所述点 C 的横坐标的取值范围为 $-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq x_c \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x_c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题考查了新定义题，涉及到的知识点有切线，同心圆，一次函数等，能正确地理解新定义，正确地进行分类讨论是解题的关键.

8. (1) ①2; ② $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$; (2) $1 \leq m \leq 5$ 或者 $-5 \leq m \leq -1$.

【详解】试题分析：(1) ①易得 $S=2$;

②得到 C 的坐标可以为 $(3, 2)$ 或者 $(3, -2)$ ，设 AC 的表达式为 $y=kx+b$ ，将 A 、 C 分别代入 AC 的表达式即可得出结论;

(2) 若 $\odot O$ 上存在点 N ，使 MN 的相关矩形为正方形，则直线 MN 的斜率 $k=\pm 1$ ，即过 M 点作 $k=\pm 1$ 的直线，与 $\odot O$ 相切，求出 M 的坐标，即可得出结论.

试题解析：(1) ① $S=2 \times 1=2$;

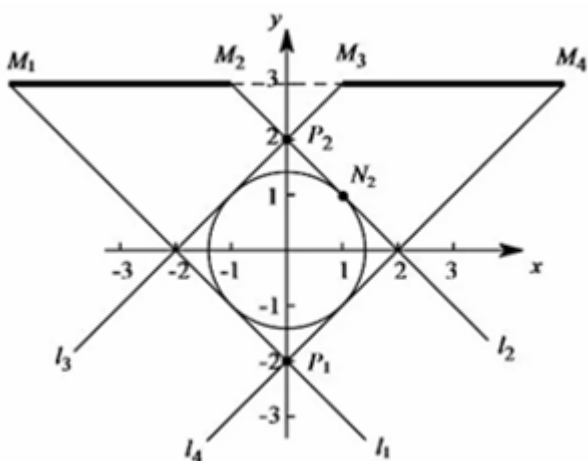
② C 的坐标可以为 $(3, 2)$ 或者 $(3, -2)$ ，设 AC 的表达式为 $y=kx+b$ ，将 A 、 C 分别代入 AC 的表达式得

到： $\begin{cases} 0=k+b \\ 2=3k+b \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0=k+b \\ -2=3k+b \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k=-1 \\ b=1 \end{cases}$ ，则直线 AC 的表达式为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$;

(2) 若 $\odot O$ 上存在点 N ，使 MN 的相关矩形为正方形，则直线 MN 的斜率 $k=\pm 1$ ，即过 M 点作 $k=\pm 1$ 的直线，与 $\odot O$ 有交点，即存在 N ，当 $k=-1$ 时，极限位置是直线与 $\odot O$ 相切，如图 l_1 与 l_2 ，直线 l_1 与 $\odot O$ 切于点 N ， $ON=\sqrt{2}$ ， $\angle ONM=90^\circ$ ， $\therefore l_1$ 与 y 交于 $P_1(0, -2)$ ， $M_1(m_1, 3)$ ， $\therefore 3-(-2)=0-m_1$ ， $\therefore m_1=-5$ ， $\therefore M_1(-5, 3)$ ；同理可得 $M_2(-1, 3)$ ；

当 $k=1$ 时，极限位置是直线 l_3 与 l_4 （与 $\odot O$ 相切），可得 $M_3(1, 3)$ ， $M_4(5, 3)$ 。

因此 m 的取值范围为 $1 \leq m \leq 5$ 或者 $-5 \leq m \leq -1$ 。



考点：一次函数，函数图象，应用数学知识解决问题的能力.

9. (1) ①见解析；② $0 < x < 2$ ；(2) 圆心 C 的横坐标的取值范围是 $2 \leq x \leq 8$.

【分析】(1) ①根据反称点的定义画图得出结论；② $\because CP \leq 2r=2$ ， $CP^2 \leq 4$ ， $P(x, -x+2)$ ， $CP^2 = x^2 + (-x+2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \leq 4$ ， $2x^2 - 4x \leq 0$ ， $x(x-2) \leq 0$ ， $\therefore 0 \leq x \leq 2$ ，把 $x=2$ 和 $x=0$ 代入验证即可得出， $P(2, 0)$ ， $P'(2, 0)$ 不符合题意 $P(0, 2)$ ， $P'(0, 0)$ 不符合题意， $\therefore 0 < x < 2$

(2) 求出 A, B 的坐标, 得出 OA 与 OB 的比值, 从而求出 $\angle OAB=30^\circ$, 设 $C(x, 0)$

①当 C 在 OA 上时, 作 $CH \perp AB$ 于 H , 则 $CH \leq CP \leq 2r=2$, $\therefore AC \leq 4$, 得出 C 点横坐标 $x \geq 2$. (当 $x=2$ 时, C 点坐标 $(2, 0)$, H 点的反称点 $H'(2, 0)$ 在圆的内部); ②当 C 在 A 点右侧时, C 到线段 AB 的距离为 AC 长, AC 最大值为 2, $\therefore C$ 点横坐标 $x \leq 8$, 得出结论.

【详解】解: (1) 解: ① $M(2, 1)$ 关于 $\odot O$ 的反称点不存在,

$N\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 存在, 关于 $\odot O$ 的反称点存在, 反称点 $N'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$T(1, \sqrt{3})$ 存在, 关于 $\odot O$ 的反称点存在, 反称点 $T'(0, 0)$.

② $\because OP \leq 2r=2$, $OP^2 \leq 4$, $P(x, -x+2)$,

$$OP^2 = x^2 + (-x+2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \leq 4$$

$$2x^2 - 4x \leq 0, \quad x(x-2) \leq 0,$$

$\therefore 0 \leq x \leq 2$, 当 $x=2$ 时, $P(2, 0)$, $P'(2, 0)$ 不符合题意

当 $x=0$ 时, $P(0, 2)$, $P'(0, 0)$ 不符合题意,

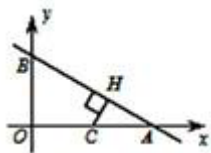
$$\therefore 0 < x < 2$$

(2) 解: 由题意得: $A(6, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3})$,

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OAB = 30^\circ,$$

设 $C(x, 0)$

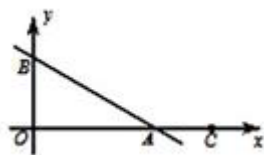


①当 C 在 OA 上时, 作 $CH \perp AB$ 于 H , 则 $CH \leq CP \leq 2r=2$, $\therefore AC \leq 4$, C 点横坐标 $x \geq 2$.

(当 $x=2$ 时, C 点坐标 $(2, 0)$, H 点的反称点 $H'(2, 0)$ 在圆的内部)

②当 C 在 A 点右侧时, C 到线段 AB 的距离为 AC 长, AC 最大值为 2, $\therefore C$ 点横坐标 $x \leq 8$

综上所述: 圆心 C 的横坐标的取值范围 $2 \leq x \leq 8$.



考点: 定义新运算; 一次函数的图象和性质; 二次函数的图象和性质; 圆的有关性质, 解直角三角形;