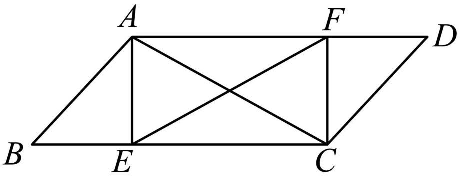
2014-2023北京中考真题数学专项练习
锐角三角函数章节综合

一、证明题

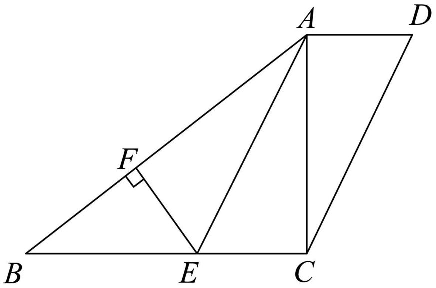
1．（2023北京中考真题）如图，在▱$ABCD$中，点E，F分别在BC，AD上，$BE=DF$，$AC=EF$．



(1)求证：四边形$AECF$是矩形；

(2) $AE=BE$，$AB=2$，$\tan\angle ACB=\frac{1}{2}$，求$BC$的长．

2．（2021北京中考真题）如图，在四边形$ABCD$中，$\angle ACB=\angle CAD=90°$，点$E$在$BC$上，$AE//DC, EF\perp AB$，垂足为$F$．



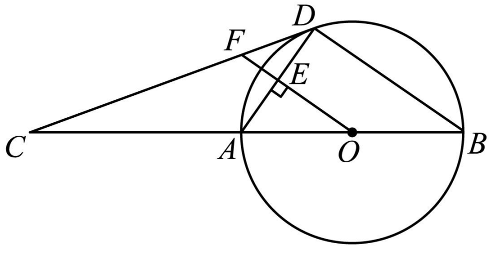
（1）求证：四边形$AECD$是平行四边形；

（2）若AE平分$\angle BAC, BE=5, \cos B=\frac{4}{5}$，求$BF$和$AD$的长．

3．（2020北京中考真题）如图，AB为⊙O的直径，C为BA延长线上一点，CD是⊙O的切线，D为切点，OF⊥AD于点E，交CD于点F．

（1）求证：∠ADC=∠AOF；

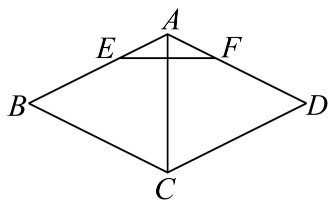
（2）若sinC=$\frac{1}{3}$，BD=8，求EF的长．



4．（2019北京中考真题）如图，在菱形ABCD中，AC为对角线，点E，F分别在AB，AD上，BE=DF，连接EF．

（1）求证：AC⊥EF；

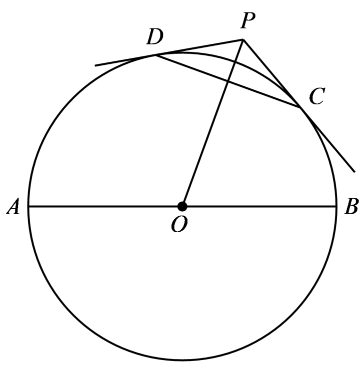
（2）延长EF交CD的延长线于点G，连接BD交AC于点O，若BD=4，tanG=$\frac{1}{2}$，求AO的长．



5.（2018北京中考真题）如图，AB是$\odot O$的直径，过$\odot O$外一点P作$\odot O$的两条切线PC，PD，切点分别为C，D，连接OP，CD.

（1）求证：$OP \perp CD$；

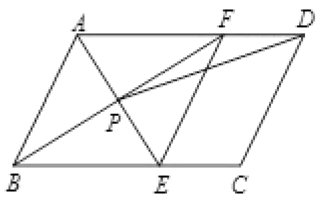
（2）连接AD，BC，若$\angle DAB = 50°$，$\angle CBA = 70°$，$OA = 2$，求OP的长.



6.（2014北京中考真题）如图，在平行四边形ABCD中，AE平分$\angle BAD$，交BC于点E，BF平分$\angle ABC$，交AD于点F，AE与BF交于点P，连接EF，PD.

（1）求证：四边形$ABEF$是菱形；

（2）若$AB = 4$，$AD = 6$，$\angle ABC = 60°$，求$\tan\angle ADP$的值.



二、计算题

7.（2023北京中考真题）计算：$4\sin 60° + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + |-2| - \sqrt{12}$.

8.（2021北京中考真题）计算：$2\sin 60° + \sqrt{12} + |-5| - (\pi + \sqrt{2})^0$.

9.（2020北京中考真题）计算：$(\frac{1}{3})^{-1} + \sqrt{18} + |-2| - 6\sin 45°$

10.（2019北京中考真题）计算：$\left|-\sqrt{3}\right| - \left(4 - \pi\right)^0 - 2\,sin60^{\circ} + (\frac{1}{4})^{-1}$.

11.（2018北京中考真题）计算：$4\sin 45° + (\pi - 2)^0 - \sqrt{18} + |-1|$.

12.（2017北京中考真题）计算：$4\cos 30^{\circ} + \left(1 - \sqrt{2}\right)^{\circ} - \sqrt{12} + |-2|$.

13.（2016北京中考真题）计算：$(3 - \pi)^0 + 4\sin 45^{\circ} - \sqrt{8} + \left|1 - \sqrt{3}\right|$.

14．（2015 北京中考真题）计算：$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-(\pi-\sqrt{7})^0+\left|\sqrt{3}-2\right|+4sin60^\circ$．

15．（2014 北京中考真题）阅读下面材料：

小腾遇到这样一个问题：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在线段 BC 上，$\angle BAD=75^\circ$，$\angle CAD=30^\circ$，$AD=2$，$BD=2DC$，求 AC 的长．

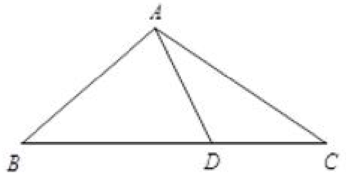


图1

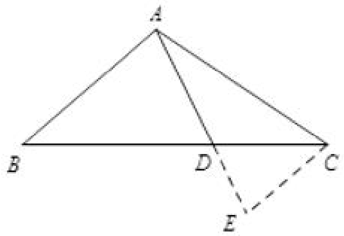


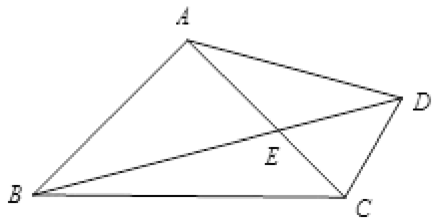
图2

小腾发现，过点 C 作 $CE // AB$，交 AD 的延长线于点 E，通过构造 $\triangle ACE$，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图 2）．

请回答：$\angle ACE$ 的度数为_，AC 的长为_．

参考小腾思考问题的方法，解决问题：

如图 3，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle ADC=75^\circ$，AC 与 BD 交于点 E，$AE=2$，$BE=2ED$，求 BC 的长．

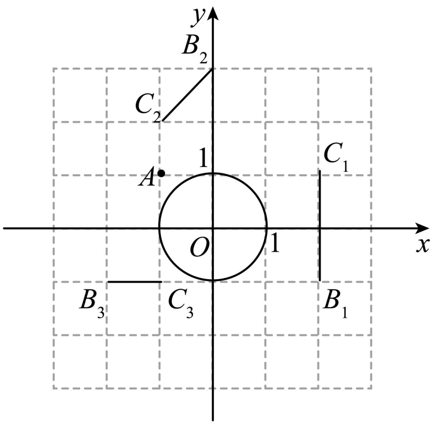


□3

16．（2014 北京中考真题）计算：$(6-\pi)^0+(-\frac{1}{5})^{-1}-3\tan 30^\circ+\left|-\sqrt{3}\right|$．

三、问答题

17．（2021 北京中考真题）在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1，对于点 A 和线段 BC，给出如下定义：若将线段 BC 绕点 A 旋转可以得到 $\odot O$ 的弦 $B'C'$（B',C' 分别是 B,C 的对应点），则称线段 BC 是 $\odot O$ 的以点 A 为中心的“关联线段”．

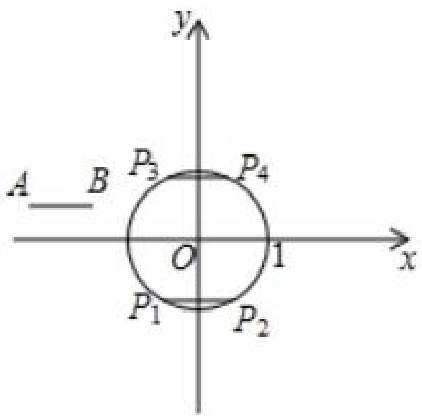


（1）如图，点 $A,B_1,C_1,B_2,C_2,B_3,C_3$ 的横、纵坐标都是整数．在线段 B_1C_1,B_2C_2,B_3C_3 中，$\odot O$ 的以点A为中心的“关联线段”是__________；

（2）$\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形，点 $A(0,t)$，其中 $t\neq 0$．若 BC 是 $\odot O$ 的以点A为中心的“关联线段”，求 t 的值；

（3）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1, AC=2$．若 BC 是 $\odot O$ 的以点A为中心的“关联线段”，直接写出 OA 的最小值和最大值，以及相应的 BC 长．

18．（2020北京中考真题）在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O的半径为1，A，B为⊙O外两点，AB=1．给出如下定义：平移线段AB，得到⊙O的弦 $A'B'$（A',B' 分别为点A，B的对应点），线段 AA' 长度的最小值称为线段AB到⊙O的“平移距离”．



（1）如图，平移线段AB到⊙O的长度为1的弦 P_1P_2 和 P_3P_4，则这两条弦的位置关系是_；在点 P_1,P_2,P_3,P_4 中，连接点A与点_的线段的长度等于线段AB到⊙O的“平移距离”；

（2）若点A，B都在直线 $y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 上，记线段AB到⊙O的“平移距离”为 d_1，求 d_1 的最小值；

（3）若点A的坐标为 $\left(2,\dfrac{3}{2}\right)$，记线段AB到⊙O的“平移距离”为 d_2，直接写出 d_2 的取值范围．

19．（2015北京中考真题）在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot C$ 的半径为 r，P 是与圆心 C 不重合的点，点 P 关于 $\odot C$ 的反称点的定义如下：若在射线 CP 上存在一点 P'，满足 $CP+CP'=2r$，则称 P' 为点 P 关于 $\odot C$ 的反称点，如图为点 P 及其关于 $\odot C$ 的反称点 P' 的示意图．

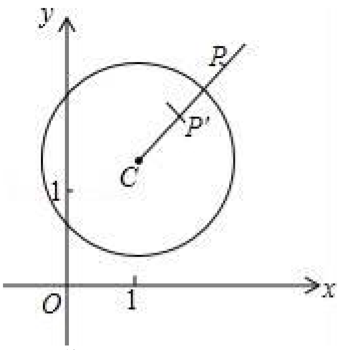
特别地，当点 P' 与圆心 C 重合时，规定 $CP'=0$．

（1）当 $\odot O$ 的半径为1时．

①分别判断点 M（2，1），N（$\frac{3}{2}$，0），T（1，$\sqrt{3}$）关于⊙O 的反称点是否存在？若存在，求其坐标；

②点 P 在直线 $y=-x+2$ 上，若点 P 关于⊙O 的反称点 P'存在，且点 P'不在 x 轴上，求点 P 的横坐标的取值范围；

（2）⊙C 的圆心在 x 轴上，半径为 1，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A，B，若线段 AB 上存在点 P，使得点 P 关于⊙C 的反称点 P'在⊙C 的内部，求圆心 C 的横坐标的取值范围.



四、作图题

20.（2015 北京中考真题）在正方形 ABCD 中，BD 是一条对角线.点 P 在射线 CD 上（与点 C，D 不重合），连接 AP，平移△ADP，使点 D 移动到点 C，得到△BCQ，过点 Q 作 QH⊥BD 于点 H，连接 AH、PH.

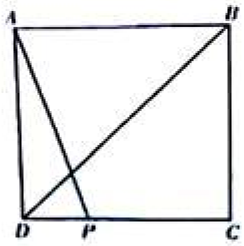
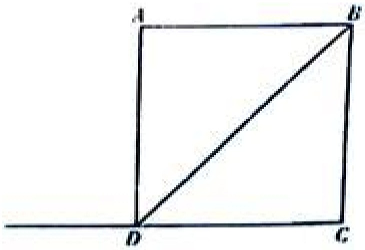


图 1



备用图

（1）若点 P 在线 CD 上，如图 1，

①依题意补全图 1；②判断 AH 与 PH 的数量关系与位置关系并加以证明；

（2）若点 P 在线 CD 的延长线上，且∠AHQ＝152°，正方形 ABCD 的边长为 1，请写出求 DP 长的思路.（可以不写出计算结果）

参考答案

1．(1)见解析

(2)$3\sqrt{2}$

【分析】（1）利用平行四边形的性质求出 $AF=EC$，证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，然后根据对角线相等的平行四边形是矩形得出结论；

（2）证明$\triangle ABE$是等腰直角三角形，可得 $AE=BE=\sqrt{2}$，然后再解直角三角形求出 EC 即可．

【详解】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD=BC$， $AD\parallel BC$，

∵ $BE=DF$，

∴ $AF=EC$，

∴四边形 $AECF$ 是平行四边形，

∵ $AC=EF$，

∴平行四边形 $AECF$ 是矩形；

（2）解：由（1）知四边形 $AECF$ 是矩形，

∴ $\angle AEC=\angle AEB=90°$，

∵ $AE=BE$， $AB=2$，

∴$\triangle ABE$是等腰直角三角形，

∴ $AE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$，

又∵ $\tan\angle ACB=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{EC}=\frac{1}{2}$，

∴ $EC=2\sqrt{2}$，

∴ $BC=BE+EC=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了平行四边形的判定和性质，矩形的判定和性质以及解直角三角形，熟练掌握相关判定定理和性质定理是解题的关键．

2．（1）见详解；（2） $BF=4$， $AD=3$

【分析】（1）由题意易得 $AD\parallel CE$，然后问题可求证；

（2）由（1）及题意易得 $EF=CE=AD$，然后由 $BE=5,\cos B=\frac{4}{5}$ 可进行求解问题．

【详解】（1）证明：∵ $\angle ACB=\angle CAD=90°$，

∴$AD\parallel CE$，

∵ $AE\parallel DC$，

∴四边形 $AECD$ 是平行四边形；

（2）解：由（1）可得四边形 $AECD$ 是平行四边形，

∴ $CE=AD$，

∵ $EF\perp AB$， AE 平分 $\angle BAC$， $\angle ACB=90^\circ$，

∴ $EF=CE$，

∴$EF=CE=AD$，

∵ $BE=5,\cos B=\dfrac{4}{5}$，

∴ $BF=BE\cdot\cos B=5\times\dfrac{4}{5}=4$，

∴ $EF=\sqrt{BE^2-BF^2}=3$，

∴ $AD=EF=3$.

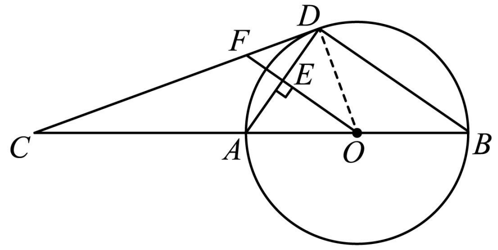
【点睛】本题主要考查平行四边形的性质与判定、勾股定理、角平分线的性质定理及三角函数，熟练掌握平行四边形的性质与判定、勾股定理、角平分线的性质定理及三角函数是解题的关键.

3.（1）见解析；（2）2.

【分析】(1)连接OD，根据CD是⊙O的切线，可推出∠ADC+∠ODA=90°，根据OF⊥AD，∠AOF+∠DAO=90°，根据OD=OA，可得∠ODA=∠DAO，即可证明；

（2）设半径为r，根据在Rt△OCD中，$\sin C=\dfrac{1}{3}$，可得 $OD=r$，$OC=3r$，AC=2r，由AB为⊙O的直径，得出∠ADB=90°，再根据推出OF⊥AD，OF∥BD，然后由平行线分线段成比例定理可得 $\dfrac{OE}{BD}=\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{1}{2}$，求出OE，$\dfrac{OF}{BD}=\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{3}{4}$，求出OF，即可求出EF.

【详解】(1) 证明：连接OD，



∵CD是⊙O的切线，

∴OD⊥CD，

∴∠ADC+∠ODA=90°，

∵OF⊥AD，

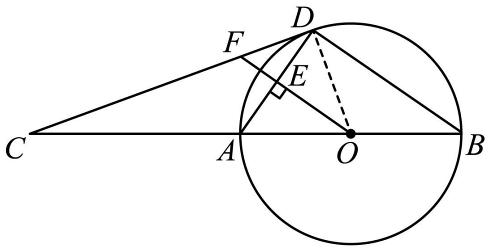
∴∠AOF+∠DAO=90°，

∵OD=OA，

∴∠ODA=∠DAO，

∴∠ADC=∠AOF；

（2）设半径为r，



在 Rt△OCD 中，$\sin C=\frac{1}{3}$，

∴ $\frac{OD}{OC}=\frac{1}{3}$，

∴ $OD=r$，$OC=3r$，

∵OA=r，

∴AC=OC-OA=2r，

∵AB 为⊙O 的直径，

∴∠ADB=90°，

又∵OF⊥AD，

∴OF∥BD，

∴ $\frac{OE}{BD}=\frac{OA}{AB}=\frac{1}{2}$，

∴OE=4，

∵ $\frac{OF}{BD}=\frac{OC}{BC}=\frac{3}{4}$，

∴ $OF=6$，

∴ $EF=OF-OE=2$．

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，锐角三角函数，切线的性质，直径所对的圆周角是 90°，灵活运用知识点是解题关键．

4．（1）证明见解析；（2）AO=1．

【分析】（1）由菱形的性质得出 AB=AD，AC 平分∠BAD，再根据等腰三角形的三线合一即可；

（2）根据菱形的性质和已知条件得出四边形 EBDG 为平行四边形，得出∠G=∠ABD，再根据 tanG=$\frac{1}{2}$ 即可求出 AO 的长．

【详解】（1）证明：∵四边形 ABCD 为菱形 ∴AB=AD，AC 平分∠BAD

∵BE=DF， ∴ $AB-BE=AD-DF$ ， ∴AE=AF

∴△AEF 是等腰三角形， ∵AC 平分∠BAD， ∴AC⊥EF

（2）解：如图 2 所示：

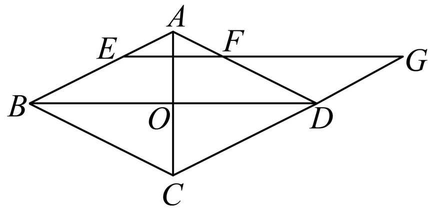


图2

∵四边形 ABCD 为菱形，∴CG∥AB，BO=$\frac{1}{2}$BD=2，∵EF∥BD

∴四边形 EBDG 为平行四边形，∴∠G=∠ABD，∴tan∠ABD=tan∠G=$\frac{1}{2}$

∴tan∠ABD=$\frac{AO}{BO}=\frac{AO}{2}=\frac{1}{2}$，∴AO=1

【点睛】本题考查了菱形的性质、平行线的判定与性质、解直角三角形，等腰三角形的性质等知识；熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

5.（1）证明见解析；（2）$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【分析】(1)根据切线的性质定理得到$PC=PD$，OP平分$\angle CPD$. 根据等腰三角形的性质即可得到$PQ\perp CD$于Q，即$OP\perp CD$.

（2）连接OC、OD. 根据等腰三角形的性质和平角的性质得到$\angle COD=180°-\angle AOD-\angle BOC=60°$. 进而得到$\angle DOQ=\frac{1}{2}\angle COD=30°$. 在Rt$\triangle ODP$中，解直角三角形即可.

【详解】(1）证明：∵PC、PD与$\odot O$相切于C、D.

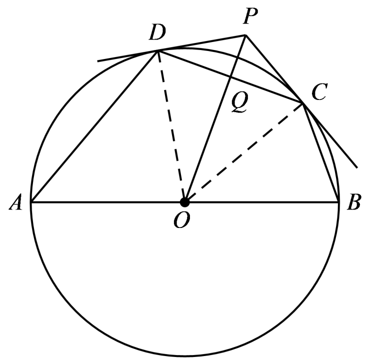
∴$PC=PD$，OP平分$\angle CPD$.

在等腰$\triangle PCD$中，$PC=PD$，PQ平分$\angle CPD$.

∴$PQ\perp CD$于Q，即$OP\perp CD$.

（2）解：连接OC、OD.

∵$OA=OD$



∴$\angle OAD=\angle ODA=50°$

∴$\angle AOD=180°-\angle OAD-\angle ODA=80°$

同理：$\angle BOC=40°$

∴$\angle COD=180°-\angle AOD-\angle BOC=60°$.

在等腰$\triangle COD$中，$OC=OD$．$OQ\perp CD$

$\therefore \angle DOQ=\frac{1}{2}\angle COD=30^\circ$．

$\because$ PD与$\odot O$相切于D．

$\therefore OD\perp DP$．

$\therefore \angle ODP=90^\circ$．

在$\mathrm{Rt}\triangle ODP$中，$\angle ODP=90^\circ$，$\angle POD=30^\circ$

$\therefore$ $OP=\frac{OD}{\cos\angle POD}=\frac{OA}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了切线的性质和判定，圆周角定理，解直角三角形等，题目比较典型，综合性比较强，难度适中．

6．（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{3}}{5}$．

【分析】(1）根据AE平分∠BAD、BF平分∠ABC及平行四边形的性质可得AF=AB=BE，从而可知ABEF为平行四边形，又邻边相等，可知为菱形；

（2）由菱形的性质可知AP的长及∠PAF=60°，过点P作PH⊥AD于H，即可得到PH、DH的长，从而可求tan∠ADP

【详解】解：(1)∵AE平分∠BAD，BF平分∠ABC

∴∠BAE=∠EAF ，∠ABF=∠EBF

∵AD//BC

∴∠EAF=∠AEB，∠AFB=∠EBF

∴∠BAE=∠AEB，∠AFB=∠ABF

∴AB=BE，AB=AF

∴AF=AB=BE

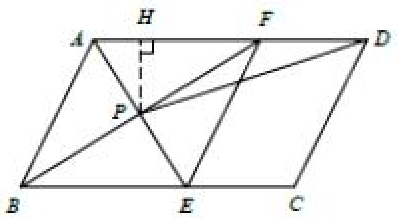
∵AD//BC

∴四边形ABEF为平行四边形

又AB=BE

∴ABEF为菱形；

（2）作PH⊥AD于H



由∠ABC=60°而（1）可知∠PAF=60°，PA=2，

则有 PH= $\sqrt{3}$ ，AH=1，

∴DH=AD-AH=5

∴tan∠ADP= $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

【点睛】本题考查平行四边形；菱形；直角三角形；三角函数.

7．5

【分析】代入特殊角三角函数值，利用负整数指数幂，绝对值和二次根式的性质化简，然后计算即可.

【详解】解：原式 $=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3+2-2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}+3+2-2\sqrt{3}$

$=5$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，牢记特殊角三角函数值，熟练掌握负整数指数幂，绝对值和二次根式的性质是解题的关键.

8． $3\sqrt{3}+4$

【分析】根据特殊三角函数值、零次幂及二次根式的运算可直接进行求解.

【详解】解：原式= $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}+5-1=3\sqrt{3}+4$.

【点睛】本题主要考查特殊三角函数值、零次幂及二次根式的运算，熟练掌握特殊三角函数值、零次幂及二次根式的运算是解题的关键.

9．5

【分析】分别计算负整数指数幂，算术平方根，绝对值，锐角三角函数，再合并即可得到答案.

【详解】解：原式= $3+3\sqrt{2}+2-6\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3+3\sqrt{2}+2-3\sqrt{2}$

$=5.$

【点睛】本题考查的是负整数指数幂，算术平方根，绝对值，锐角三角函数，以及合并同类二次根式，掌握以上的知识是解题的关键.

10．3

【分析】根据绝对值、零指数幂、特殊角的三角函数值、负指数幂法则计算即可

【详解】原式= $\sqrt{3}-1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4$

$=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+4$

=3

【点睛】本题考查零指数幂、特殊角的三角函数值，负指数幂，熟练掌握相关的知识是解题的关键.

11． $2-\sqrt{2}$

【分析】按照实数的运算顺序进行运算即可.

【详解】原式$=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1-3\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查实数的运算，主要考查零次幂，绝对值，特殊角的三角函数值以及二次根式，熟练掌握各个知识点是解题的关键.

12．3．

【详解】试题分析：利用特殊三角函数值，零指数幂，算术平方根，绝对值计算即可.

试题解析：原式$=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1-2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}+2=3$.

13．$\sqrt{3}$．

【分析】根据实数的运算顺序，首先计算乘方、开方和乘法，然后从左向右依次计算即可.

【详解】解：原式$=1+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}$．

14．$5+\sqrt{3}$

【分析】先根据一个数的负指数幂等于正指数幂的倒数，一个不等于零的数的零指数幂为1，一个数的绝对值是非负数，特殊角三角函数值 $\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求出各项的值即可.

【详解】解：原式$=4-1+2-\sqrt{3}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5-\sqrt{3}+2\sqrt{3}=5+\sqrt{3}$

【点睛】本题考查实数的混合运算；特殊角三角函数值.

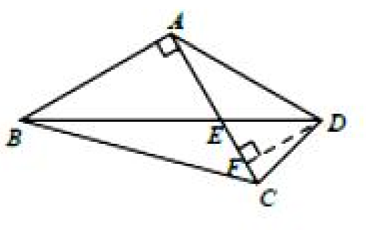
15．∠ACE 的度数为 75°，AC 的长为 3. $BC=2\sqrt{6}$

【详解】试题分析：由 CE//AB 可知∠ACE=∠BAD=75°，又∠CAD=30°，可知△ACE 是等腰三角形，又 CE//AB 可知△ABD∽△CED，由相似的性质可知 DE=1，所以 AD=AC=AE+CE=3

图 3 中，由已知的条件可知△ACD 是等腰三角形，因为∠BAC=90°，因此可过点 D 作 DF⊥AC，然后利用相似、三角函数、勾股定理加以解决

试题解析：图（2）：∠ACE 的度数为 75°，AC 的长为 3.

图（3）：过点 D 作 DF⊥AC 于 F



∵∠BAC=90°

∴AB//DF

∴△ABE∽△FDE

$\therefore\frac{AB}{DF}=\frac{AE}{EF}=\frac{BE}{ED}=2$

∴EF=1

∵在△ACD 中，∠CAD=30°，∠ADC=75°

∴∠ACD=75°

∴AC=AD

∵DF⊥AC

∴∠AFD=90°

在△AFD 中，AF＝２+１＝３，∠FAD＝３０°

∴DF＝AFtan30°＝$\sqrt{3}$，AD=2DF=2$\sqrt{3}$

∴AC=2$\sqrt{3}$，AB=2DF==2$\sqrt{3}$

$\therefore BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{6}$

考点：1、等腰三角形的判定；2、相似三角形的判定与性质；3、三角函数的应用

16．-4

【详解】特殊角的三角函数值，按顺序计算即可

试题解析：原式=$1+(-5)-\sqrt{3}+\sqrt{3}$=-4

考点：1、零指数幂；2 特殊角的三角函数值；3、绝对值；4、负指数幂

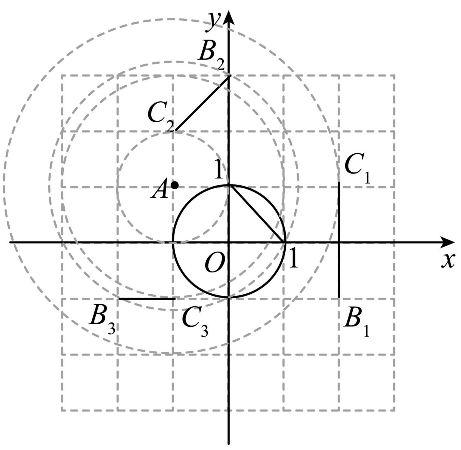
17.（1）B_2C_2；（2）$t=\pm\sqrt{3}$；（3）当$OA_{\min}=1$时，此时$BC=\sqrt{3}$；当$OA_{\max}=2$时，此时$BC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

【分析】（1）以点 A 为圆心，分别以 $AB_1,AC_1,AB_2,AC_2,AB_3,AC_3$为半径画圆，进而观察是否与⊙$O$ 有交点即可；

（2）由旋转的性质可得△$AB'C'$是等边三角形，且$B'C'$是⊙O 的弦，进而画出图象，则根据等边三角形的性质可进行求解；

（3）由 BC 是⊙O 的以点 A 为中心的“关联线段”，则可知 B',C' 都在⊙O 上，且 $AB'=AB=1,AC'=AC=2$，然后由题意可根据图象来进行求解即可.

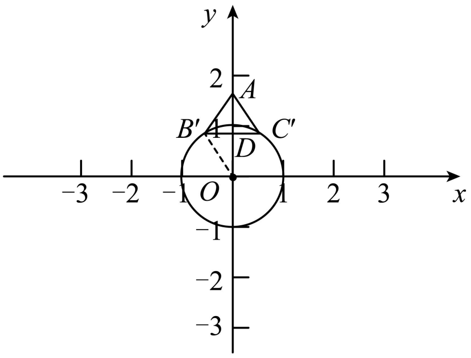
【详解】解：（1）由题意得：



通过观察图象可得：线段 B_2C_2 能绕点 A 旋转 90°得到⊙O 的“关联线段”，B_1C_1,B_3C_3都不能绕点 A 进行旋转得到；

故答案为B_2C_2；

（2）由题意可得：当BC是$\odot O$的以点A为中心的“关联线段”时，则有$\triangle AB'C'$是等边三角形，且边长也为1，当点A在y轴的正半轴上时，如图所示：



设$B'C'$与y轴的交点为D，连接OB'，易得$B'C'\perp y$轴，

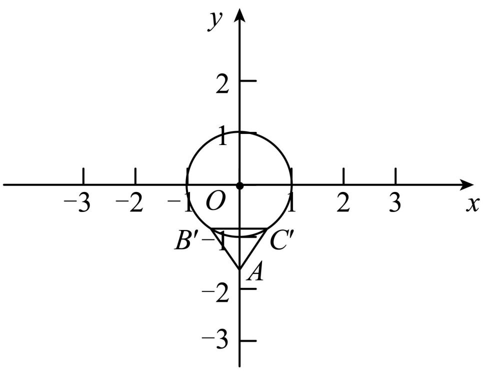
$\therefore B'D=DC'=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore OD=\sqrt{OB'^2-B'D^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=\sqrt{AB'^2-B'D^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore OA=\sqrt{3}$，

$\therefore t=\sqrt{3}$；

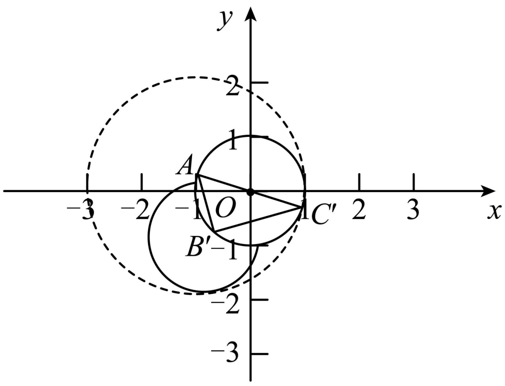
当点A在y轴的正半轴上时，如图所示：



同理可得此时的$OA=\sqrt{3}$，

$\therefore t=-\sqrt{3}$；

（3）由BC是$\odot O$的以点A为中心的“关联线段”，则可知B',C'都在$\odot O$上，且$AB'=AB=1, AC'=AC=2$，则有当以B'为圆心，1为半径作圆，然后以点A为圆心，2为半径作圆，即可得到点A的运动轨迹，如图所示：



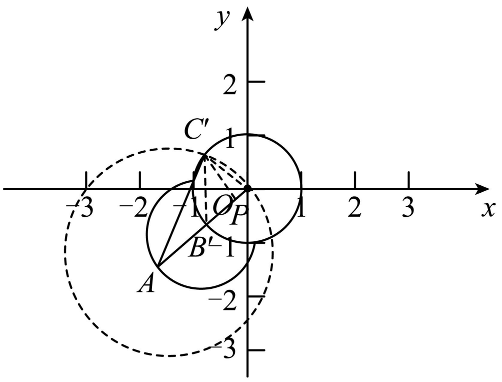
由运动轨迹可得当点 A 也在 $\odot O$ 上时为最小，最小值为 1，此时 AC' 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AB'C' = 90°$，

$\therefore \angle AC'B' = 30°$，

$\therefore BC = B'C' = AC' \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$；

由以上情况可知当点 A, B', O 三点共线时，OA 的值为最大，最大值为 2，如图所示：



连接 $OC', B'C'$，过点 C' 作 $C'P \perp OA$ 于点 P，

$\therefore OC' = 1, AC' = OA = 2$，

设 $OP = x$，则有 $AP = 2 - x$，

$\therefore$ 由勾股定理可得：$C'P^2 = AC'^2 - AP^2 = OC'^2 - OP^2$，即 $2^2 - (2-x)^2 = 1 - x^2$，

解得：$x = \dfrac{1}{4}$，

$\therefore C'P = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore B'P = OB' - OP = \dfrac{3}{4}$，

在 $Rt\triangle B'PC'$ 中，$B'C' = \sqrt{B'P^2 + C'P^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore BC = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

综上所述：当 $OA_{\min} = 1$ 时，此时 $BC = \sqrt{3}$；当 $OA_{\max} = 2$ 时，此时 $BC = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

【点睛】本题主要考查旋转的综合、圆的基本性质、三角函数及等边三角形的性质，熟练掌握旋转的性质、

圆的基本性质、三角函数及等边三角形的性质是解题的关键．

18．（1）平行，P_3；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$；（3）$\frac{3}{2} \le d_2 \le \frac{\sqrt{39}}{2}$

【分析】（1）根据圆的性质及“平移距离”的定义填空即可；

（2）过点 O 作 OE⊥AB 于点 E，交弦 CD 于点 F，分别求出 OE、OF 的长，由 $d_1 = OE - OF$ 得到 d_1 的最小值；

（3）线段 AB 的位置变换，可以看作是以点 A$\left(2,\frac{3}{2}\right)$为圆心，半径为 1 的圆，只需在⊙O 内找到与之平行，且长度为 1 的弦即可．平移距离 d_2 的最大值即点 A，B 点的位置，由此得出 d_2 的取值范围．

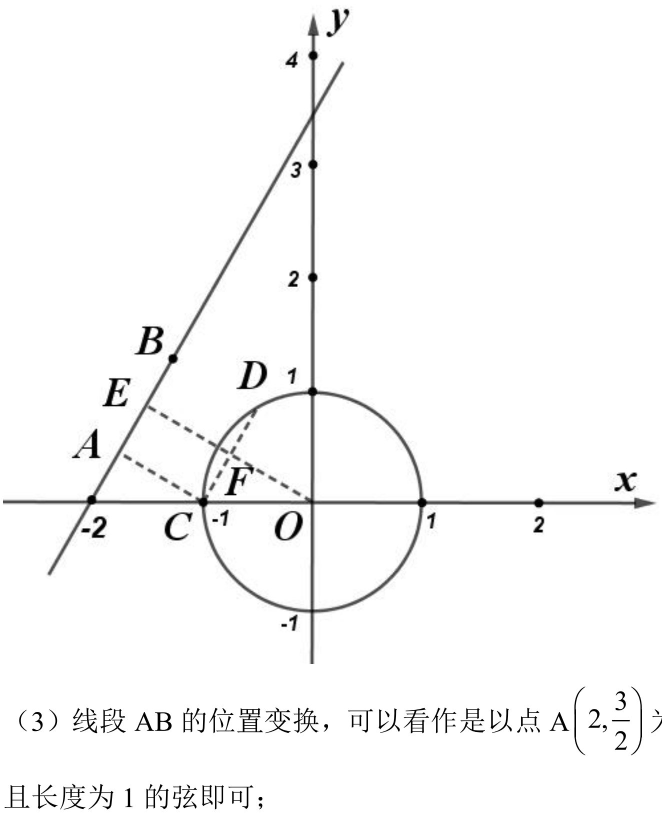
【详解】解：（1）平行；P_3；

（2）如图，线段 AB 在直线 $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 上，平移之后与圆相交，得到的弦为 CD，CD∥AB，过点 O 作 OE⊥AB 于点 E，交弦 CD 于点 F，OF⊥CD，令 $y = 0$，直线与 x 轴交点为（-2，0），直线与 x 轴夹角为 60°，

∴ $OE = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$．

由垂径定理得：$OF = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

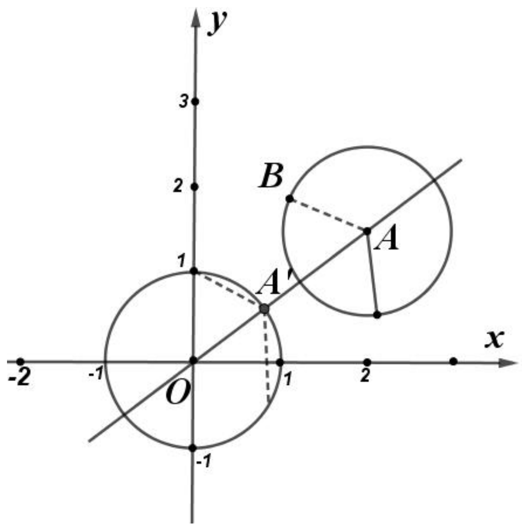
∴ $d_1 = OE - OF = \frac{\sqrt{3}}{2}$；



（3）线段 AB 的位置变换，可以看作是以点 A$\left(2,\frac{3}{2}\right)$为圆心，半径为 1 的圆，只需在⊙O 内找到与之平行，且长度为 1 的弦即可；

点 A 到 O 的距离为 $AO = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$．

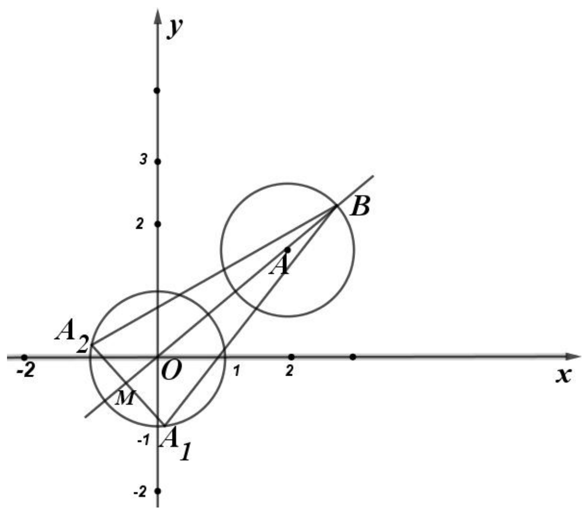
如图，平移距离 d_2 的最小值即点 A 到⊙O 的最小值：$\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$；



平移距离 d_2 的最大值线段是下图 AB 的情况，即当 A_1,A_2 关于 OA 对称，且 $A_1B_2\perp A_1A_2$ 且 $A_1B_2=1$ 时. $\angle B_2A_2A_1=60°$，则 $\angle OA_2A_1=30°$,

$\because OA_2=1$, $\therefore OM=\frac{1}{2}$, $A_2M=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore MA=3$, $AA_2=\sqrt{3^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$,



$\therefore$ d_2 的取值范围为：$\frac{3}{2}\le d_2\le\frac{\sqrt{39}}{2}$.

【点睛】本题考查圆的基本性质及与一次函数的综合运用，熟练掌握圆的基本性质、点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系是解题的关键.

19.（1）①见解析；②$0<x<2$；（2）圆心 C 的横坐标的取值范围是 $2\le x\le 8$.

【分析】(1)　①根据反称点的定义画图得出结论；②$\because CP\le 2r=2$，$CP^2\le 4$，　P（x，$-x+2$），　$CP^2=x^2+(-x+2)^2=2x^2-4x+4\le$，$2x^2-4x\le 0$，　$x(x-2)\le 0$，$\therefore 0\le x\le 2$，把 $x=2$ 和 $x=0$ 代入验证即可得出，P（2，0），P'（2，0）不符合题意 P（0，2），P'（0，0）不符合题意，$\therefore 0<x<2$

（2）求出 A，B 的坐标，得出 OA 与 OB 的比值，从而求出$\angle OAB=30°$，设 C（x，0）

①当 C 在 OA 上时，作 $CH\perp AB$ 于 H，则 $CH\le CP\le 2r=2$，∴$AC\le 4$，得出 C 点横坐标 $x\ge 2$．（当 $x=2$ 时，C 点坐标（2，0），H 点的反称点 H'（2，0）在圆的内部）；②当 C 在 A 点右侧时，C 到线段 AB 的距离为 AC 长，AC 最大值为 2，∴C 点横坐标 $x\le 8$，得出结论.

【详解】解： （1）解：①M（2，1）关于⊙O 的反称点不存在，

$N\left(\frac{3}{2},0\right)$存在，关于⊙O 的反称点存在，反称点$N'\left(\frac{1}{2},0\right)$

$T(1,\sqrt{3})$存在，关于⊙O 的反称点存在，反称点 T'（0，0）.

②∵$OP\le 2r=2$，$OP^2\le 4$， P（x，$-x+2$），

$OP^2=x^2+(-x+2)^2=2x^2-4x+4\le 4$

$2x^2-4x\le 0$， $x(x-2)\le 0$，

∴$0\le x\le 2$，当 $x=2$ 时，P（2，0），P'（2，0）不符合题意

当 $x=0$ 时，P（0，2），P'（0，0）不符合题意，

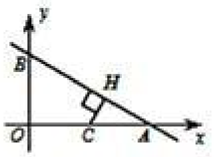
∴$0<x<2$

（2）解：由题意得：A（6，0），$B\left(0,2\sqrt{3}\right)$，

∴$\frac{OA}{OB}=\sqrt{3}$，

∴$\angle OAB=30°$，

设 C（x，0）

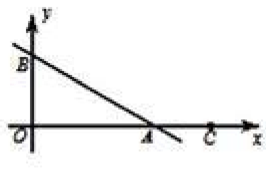


①当 C 在 OA 上时，作 $CH\perp AB$ 于 H，则 $CH\le CP\le 2r=2$，∴$AC\le 4$， C 点横坐标 $x\ge 2$.

（当 $x=2$ 时，C 点坐标（2，0），H 点的反称点 H'（2，0）在圆的内部）

②当 C 在 A 点右侧时，C 到线段 AB 的距离为 AC 长，AC 最大值为 2，∴C 点横坐标 $x\le 8$

综上所述：圆心 C 的横坐标的取值范围 $2\le x\le 8$.



考点：定义新运算；一次函数的图象和性质；二次函数的图象和性质；圆的有关性质，解直角三角形；

20.（1）①如图；②AH＝PH，AH⊥PH．证明见解析（2） $\tan 28^{\circ}$或$\frac{1-\tan 17^{\circ}}{1+\tan 17^{\circ}}$

【详解】试题分析：（1）①如图（1）；②（1）法一：轴对称作法，判断：AH＝PH，AH⊥PH．连接 CH，根据正方形的每条对角线平分一组对角得：△DHQ 等腰 Rt△，根据平移的性质得 DP＝CQ，证得△HDP≌△△HQC，全等三角形的对应边相等得 PH＝CH，等边对等角得∠HPC＝∠HCP，再结合 BD 是正

方形的对称轴得出∠AHP＝180°－∠ADP＝90°，∴AH＝PH 且 AH⊥PH．四点共圆作法，同上得：∠HPC＝∠DAH，∴A、D、P、H 共向，∴∠AHP＝90°，∠APH＝∠ADH＝45°，∴△APH 等腰 Rt△．

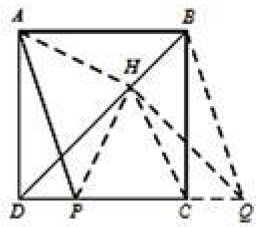
（2）轴对称作法同（1）作 HR⊥PC 于 R，∵∠AHQ＝152°，∴∠AHB＝62°，∴∠DAH＝17° ∴∠DCH＝17°. 设 DP＝x，则 $DR=HR=RQ=\frac{1-x}{2}$.由 $\tan 17^{\circ}=\frac{HR}{CR}$ 代入 HR，CR 解方程即可得出 x 的值. 四点共圆作法，A、H、D、P 共向，∴∠APD＝∠AHB＝62°，∴ $PD=\frac{AD}{\tan 62^{\circ}}=\frac{1}{\tan 62^{\circ}}=\tan 28^{\circ}$.

试题解析：（1）①

法一：轴对称作法，判断：AH＝PH，AH⊥PH

证：连接 CH，得：△DHQ 等腰 Rt△，又∵DP＝CQ，∴△HDP≌△△HQC，∴PH＝CH，∠HPC＝∠HCP BD 为正方形 ABCD 对称轴，∴AH＝CH，∠DAH＝∠HCP，∴AH＝PH，∠DAH＝∠HPC，∴∠AHP＝180°－∠ADP＝90°，∴AH＝PH 且 AH⊥PH.

法二：四点共圆作法，同上得：∠HPC＝∠DAH，∴A、D、P、H 共向，∴∠AHP＝90°，∠APH＝∠ADH＝45°，∴△APH 等腰 Rt△.

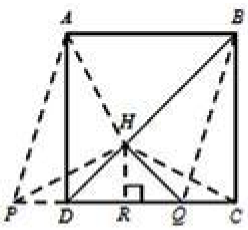


（2）法一：轴对称作法

考虑△DHQ 等腰 Rt△，PD＝CQ，作 HR⊥PC 于 R，∵∠AHQ＝152°，∴∠AHB＝62°，∴∠DAH＝17° ∴∠DCH＝17°．设 DP＝x，则 $DR=HR=RQ=\frac{1-x}{2}$.

由 $\tan 17^{\circ}=\frac{HR}{CR}$ 得：$\frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1+x}{2}}=\tan 17^{\circ}$，∴ $x=\frac{1-\tan 17^{\circ}}{1+\tan 17^{\circ}}$．即 PD=$\frac{1-\tan 17^{\circ}}{1+\tan 17^{\circ}}$

法二：四点共向作法，A、H、D、P 共向，∴∠APD＝∠AHB＝62°，∴ $PD=\frac{AD}{\tan 62^{\circ}}=\frac{1}{\tan 62^{\circ}}=\tan 28^{\circ}$.



考点：全等三角形的判定；解直角三角形；正方形的性质；四点共圆