

2014-2023 北京中考真题数学专项练习

锐角三角函数



一、计算题

1. (2023 北京中考真题) 计算: $4\sin 60^\circ + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + |-2| - \sqrt{12}$.
2. (2021 北京中考真题) 计算: $2\sin 60^\circ + \sqrt{12} + |-5| - (\pi + \sqrt{2})^0$.
3. (2020 北京中考真题) 计算: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \sqrt{18} + |-2| - 6\sin 45^\circ$.
4. (2019 北京中考真题) 计算: $|- \sqrt{3}| - (4 - \pi)^0 - 2\sin 60^\circ + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.
5. (2018 北京中考真题) 计算: $4\sin 45^\circ + (\pi - 2)^0 - \sqrt{18} + |-1|$.
6. (2017 北京中考真题) 计算: $4\cos 30^\circ + (1 - \sqrt{2})^0 - \sqrt{12} + |-2|$.
7. (2016 北京中考真题) 计算: $(3 - \pi)^0 + 4\sin 45^\circ - \sqrt{8} + |1 - \sqrt{3}|$.
8. (2014 北京中考真题) 阅读下面材料:

小腾遇到这样一个问题: 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, $\angle BAD = 75^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$, $AD = 2$, $BD = 2DC$, 求 AC 的长.

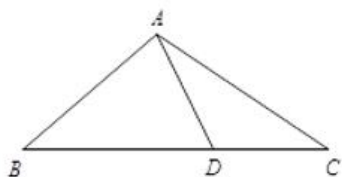


图1

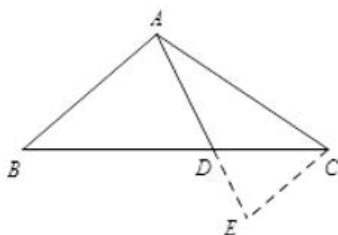


图2

小腾发现, 过点 C 作 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于点 E , 通过构造 $\triangle ACE$, 经过推理和计算能够使问题得到解决 (如图 2).

请回答: $\angle ACE$ 的度数为_, AC 的长为_.

参考小腾思考问题的方法, 解决问题:

如图 3, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ADC = 75^\circ$, AC 与 BD 交于点 E , $AE = 2$, $BE = 2ED$, 求 BC 的长.

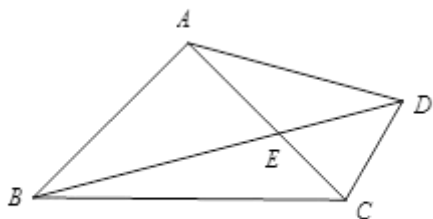


图3

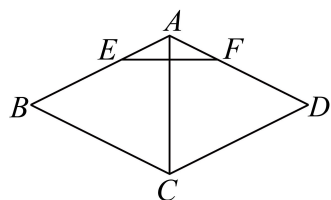
9. (2014 北京中考真题) 计算: $(6-\pi)^0 + (-\frac{1}{5})^{-1} - 3\tan 30^\circ + |-\sqrt{3}|$.

二、证明题

10. (2019 北京中考真题) 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, $BE=DF$, 连接 EF .

(1) 求证: $AC \perp EF$;

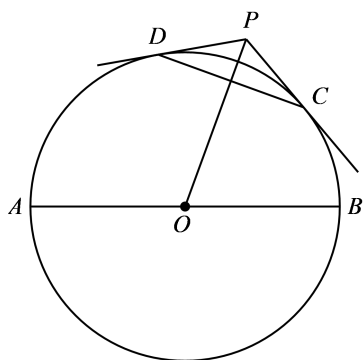
(2) 延长 EF 交 CD 的延长线于点 G , 连接 BD 交 AC 于点 O , 若 $BD=4$, $\tan G = \frac{1}{2}$, 求 AO 的长.



11. (2018 北京中考真题) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 过 $\odot O$ 外一点 P 作 $\odot O$ 的两条切线 PC, PD , 切点分别为 C, D , 连接 OP, CD .

(1) 求证: $OP \perp CD$;

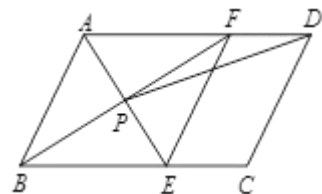
(2) 连接 AD, BC , 若 $\angle DAB = 50^\circ$, $\angle CBA = 70^\circ$, $OA = 2$, 求 OP 的长.



12. (2014 北京中考真题) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$, 交 BC 于点 E , BF 平分 $\angle ABC$, 交 AD 于点 F , AE 与 BF 交于点 P , 连接 EF, PD .

(1) 求证: 四边形 $ABEF$ 是菱形;

(2) 若 $AB = 4$, $AD = 6$, $\angle ABC = 60^\circ$, 求 $\tan \angle ADP$ 的值.



参考答案

1. 5

【分析】代入特殊角三角函数值，利用负整数指数幂，绝对值和二次根式的性质化简，然后计算即可.

【详解】解：原式 $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 2 - 2\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{3} + 3 + 2 - 2\sqrt{3}$
 $= 5.$

【点睛】本题考查了实数的混合运算，牢记特殊角三角函数值，熟练掌握负整数指数幂，绝对值和二次根式的性质是解题的关键.

2. $3\sqrt{3}+4$

【分析】根据特殊三角函数值、零次幂及二次根式的运算可直接进行求解.

【详解】解：原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 5 - 1 = 3\sqrt{3} + 4.$

【点睛】本题主要考查特殊三角函数值、零次幂及二次根式的运算，熟练掌握特殊三角函数值、零次幂及二次根式的运算是解题的关键.

3. 5

【分析】分别计算负整数指数幂，算术平方根，绝对值，锐角三角函数，再合并即可得到答案.

【详解】解：原式 $= 3 + 3\sqrt{2} + 2 - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= 3 + 3\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{2}$
 $= 5.$

【点睛】本题考查的是负整数指数幂，算术平方根，绝对值，锐角三角函数，以及合并同类二次根式，掌握以上的知识是解题的关键.

4. 3

【分析】根据绝对值、零指数幂、特殊角的三角函数值、负指数幂法则计算即可

【详解】原式 $= \sqrt{3} - 1 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4$
 $= \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} + 4$
 $= 3$

【点睛】本题考查零指数幂、特殊角的三角函数值，负指数幂，熟练掌握相关的知识是解题的关键.

5. $2-\sqrt{2}$

【分析】按照实数的运算顺序进行运算即可.

【详解】原式 $= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 3\sqrt{2} + 1 = 2 - \sqrt{2}.$

【点睛】本题考查实数的运算，主要考查零次幂，绝对值，特殊角的三角函数值以及二次根式，熟练掌握各个知识点是解题的关键.

6. 3.

【详解】试题分析：利用特殊三角函数值，零指数幂，算术平方根，绝对值计算即可.

试题解析：原式= $4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 2\sqrt{3} + 2 = 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} + 2 = 3$.

7. $\sqrt{3}$.

【分析】根据实数的运算顺序，首先计算乘方、开方和乘法，然后从左向右依次计算即可.

【详解】解：原式= $1 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$.

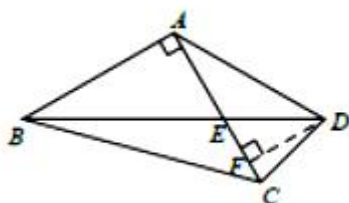
8. $\angle ACE$ 的度数为 75° , AC 的长为 3. $BC = 2\sqrt{6}$

【详解】试题分析：由 $CE \parallel AB$ 可知 $\angle ACE = \angle BAD = 75^\circ$ ，又 $\angle CAD = 30^\circ$ ，可知 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，又 $CE \parallel AB$ 可知 $\triangle ABD \sim \triangle CED$ ，由相似的性质可知 $DE = 1$ ，所以 $AD = AC = AE + CE = 3$

图 3 中，由已知的条件可知 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，因为 $\angle BAC = 90^\circ$ ，因此可过点 D 作 $DF \perp AC$ ，然后利用相似、三角函数、勾股定理加以解决

试题解析：图（2）： $\angle ACE$ 的度数为 75° ， AC 的长为 3.

图（3）：过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F



$\because \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore AB \parallel DF$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FDE$

$$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{EF} = \frac{BE}{ED} = 2$$

$\therefore EF = 1$

$\because$ 在 $\triangle ACD$ 中， $\angle CAD = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 75^\circ$

$\therefore \angle ACD = 75^\circ$

$\therefore AC = AD$

$\because DF \perp AC$

$\therefore \angle AFD = 90^\circ$

在 $\triangle AFD$ 中， $AF = 2 + 1 = 3$ ， $\angle FAD = 30^\circ$

$\therefore DF = AF \tan 30^\circ = \sqrt{3}$ ， $AD = 2DF = 2\sqrt{3}$

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$ ， $AB = 2DF = 2\sqrt{3}$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{6}$$

考点：1、等腰三角形的判定；2、相似三角形的判定与性质；3、三角函数的应用

9. -4

【详解】特殊角的三角函数值，按顺序计算即可

试题解析：原式 $=1+(-5)-\sqrt{3}+\sqrt{3}=-4$

考点：1、零指数幂；2 特殊角的三角函数值；3、绝对值；4、负指数幂

10. (1) 证明见解析；(2) $AO=1$.

【分析】(1) 由菱形的性质得出 $AB=AD$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ，再根据等腰三角形的三线合一即可；

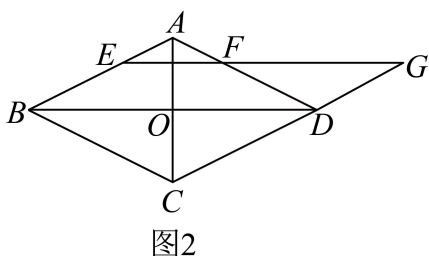
(2) 根据菱形的性质和已知条件得出四边形 $EBDG$ 为平行四边形，得出 $\angle G = \angle ABD$ ，再根据 $\tan G = \frac{1}{2}$ 即可求出 AO 的长.

【详解】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形 $\therefore AB=AD$ ， AC 平分 $\angle BAD$

$\because BE=DF$ ， $\therefore AB-BE=AD-DF$ ， $\therefore AE=AF$

$\therefore \triangle AEF$ 是等腰三角形， $\because AC$ 平分 $\angle BAD$ ， $\therefore AC \perp EF$

(2) 解：如图 2 所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $\therefore CG \parallel AB$ ， $BO = \frac{1}{2} BD = 2$ ， $\because EF \parallel BD$

$\therefore$ 四边形 $EBDG$ 为平行四边形， $\therefore \angle G = \angle ABD$ ， $\therefore \tan \angle ABD = \tan \angle G = \frac{1}{2}$

$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AO}{BO} = \frac{AO}{2} = \frac{1}{2}$ ， $\therefore AO = 1$

【点睛】本题考查了菱形的性质、平行线的判定与性质、解直角三角形，等腰三角形的性质等知识；熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

11. (1) 证明见解析；(2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【分析】(1) 根据切线的性质定理得到 $PC = PD$ ， OP 平分 $\angle CPD$. 根据等腰三角形的性质即可得到 $PQ \perp CD$ 于 Q ，即 $OP \perp CD$.

(2) 连接 OC 、 OD . 根据等腰三角形的性质和平角的性质得到 $\angle COD = 180^\circ - \angle AOD - \angle BOC = 60^\circ$. 进而得到 $\angle DOQ = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ$. 在 $Rt\triangle ODP$ 中，解直角三角形即可.

【详解】(1) 证明： $\because PC$ 、 PD 与 $\odot O$ 相切于 C 、 D .

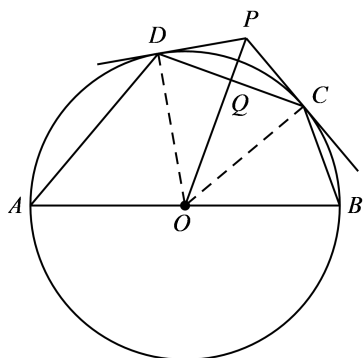
$\therefore PC = PD$ ， OP 平分 $\angle CPD$.

在等腰 $\triangle PCD$ 中， $PC=PD$ ， PQ 平分 $\angle CPD$ 。

$\therefore PQ \perp CD$ 于 Q ，即 $OP \perp CD$ 。

(2) 解：连接 OC 、 OD 。

$\because OA=OD$



$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 50^\circ$

$\therefore \angle AOD = 180^\circ - \angle OAD - \angle ODA = 80^\circ$

同理： $\angle BOC = 40^\circ$

$\therefore \angle COD = 180^\circ - \angle AOD - \angle BOC = 60^\circ$ 。

在等腰 $\triangle COD$ 中， $OC=OD$ 。 $OQ \perp CD$

$\therefore \angle DOQ = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ$ 。

$\because PD$ 与 $\odot O$ 相切于 D 。

$\therefore OD \perp DP$ 。

$\therefore \angle ODP = 90^\circ$ 。

在 $Rt\triangle ODP$ 中， $\angle ODP = 90^\circ$ ， $\angle POD = 30^\circ$

$\therefore OP = \frac{OD}{\cos \angle POD} = \frac{OA}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$ 。

【点睛】本题考查了切线的性质和判定，圆周角定理，解直角三角形等，题目比较典型，综合性比较强，难度适中。

12. (1) 证明见解析；(2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 。

【分析】(1) 根据 AE 平分 $\angle BAD$ 、 BF 平分 $\angle ABC$ 及平行四边形的性质可得 $AF=AB=BE$ ，从而可知 $ABEF$ 为平行四边形，又邻边相等，可知为菱形；

(2) 由菱形的性质可知 AP 的长及 $\angle PAF=60^\circ$ ，过点 P 作 $PH \perp AD$ 于 H ，即可得到 PH 、 DH 的长，从而可求 $\tan \angle ADP$

【详解】解：(1) $\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ， BF 平分 $\angle ABC$

$\therefore \angle BAE = \angle EAF$ ， $\angle ABF = \angle EBF$

$\because AD \parallel BC$

$$\therefore \angle EAF = \angle AEB, \quad \angle AFB = \angle EBF$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB, \quad \angle AFB = \angle ABF$$

$$\therefore AB = BE, \quad AB = AF$$

$$\therefore AF = AB = BE$$

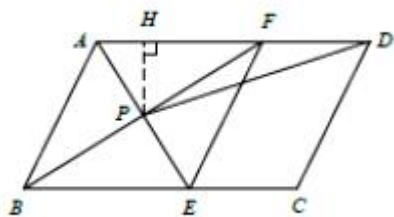
$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \text{四边形 } ABEF \text{ 为平行四边形}$$

$$\text{又 } AB = BE$$

$$\therefore ABEF \text{ 为菱形};$$

(2) 作 $PH \perp AD$ 于 H



由 $\angle ABC = 60^\circ$ 而 (1) 可知 $\angle PAF = 60^\circ$, $PA = 2$,

则有 $PH = \sqrt{3}$, $AH = 1$,

$$\therefore DH = AD - AH = 5$$

$$\therefore \tan \angle ADP = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

【点睛】 本题考查平行四边形；菱形；直角三角形；三角函数.