

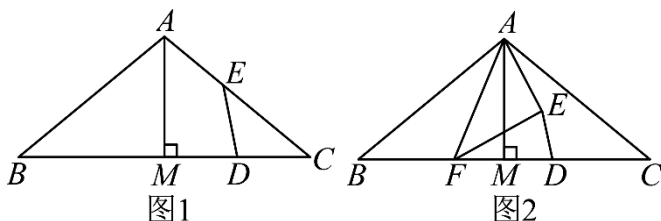
2014-2023 北京中考真题数学专项练习

几何综合



一、解答题

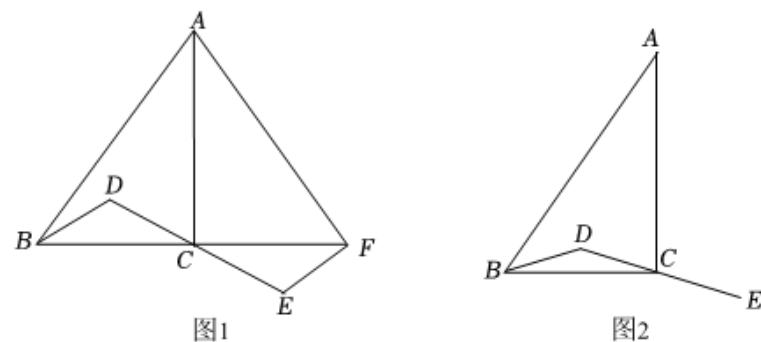
1. (2023·北京·统考中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), $AM \perp BC$ 于点 M , D 是线段 MC 上的动点 (不与点 M , C 重合), 将线段 DM 绕点 D 顺时针旋转 2α 得到线段 DE .



(1) 如图 1, 当点 E 在线段 AC 上时, 求证: D 是 MC 的中点;

(2) 如图 2, 若在线段 BM 上存在点 F (不与点 B , M 重合) 满足 $DF = DC$, 连接 AE , EF , 直接写出 $\angle AEF$ 的大小, 并证明.

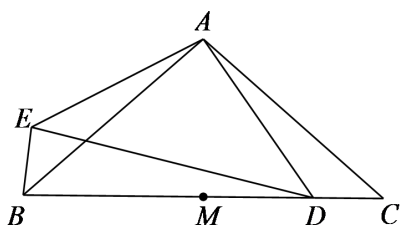
2. (2022·北京·统考中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 为 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 BD , DC , 延长 DC 到点 E , 使得 $CE = DC$.



(1) 如图 1, 延长 BC 到点 F , 使得 $CF = BC$, 连接 AF , EF , 若 $AF \perp EF$, 求证: $BD \perp AF$;

(2) 连接 AE , 交 BD 的延长线于点 H , 连接 CH , 依题意补全图 2, 若 $AB^2 = AE^2 + BD^2$, 用等式表示线段 CD 与 CH 的数量关系, 并证明.

3. (2021·北京·统考中考真题) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$, M 为 BC 的中点, 点 D 在 MC 上, 以点 A 为中心, 将线段 AD 顺时针旋转 α 得到线段 AE , 连接 BE , DE .



(1) 比较 $\angle BAE$ 与 $\angle CAD$ 的大小; 用等式表示线段 BE , BM , MD 之间的数量关系, 并证明;

(2) 过点 M 作 AB 的垂线, 交 DE 于点 N , 用等式表示线段 NE 与 ND 的数量关系, 并证明.

4. (2020·北京·统考中考真题) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC > BC$, D 是 AB 的中点. E 为直线上一动点, 连接 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$, 交直线 BC 于点 F , 连接 EF .

- (1) 如图 1, 当 E 是线段 AC 的中点时, 设 $AE = a, BF = b$, 求 EF 的长 (用含 a, b 的式子表示);
- (2) 当点 E 在线段 CA 的延长线上时, 依题意补全图 2, 用等式表示线段 AE, EF, BF 之间的数量关系, 并证明.

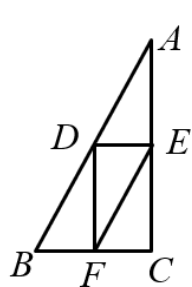


图1

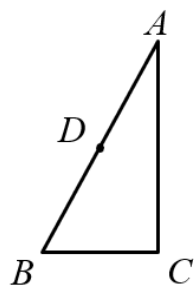


图2

5. (2019·北京·中考真题) 已知 $\angle AOB = 30^\circ$, H 为射线 OA 上一定点, $OH = \sqrt{3} + 1$, P 为射线 OB 上一点, M 为线段 OH 上一动点, 连接 PM, 满足 $\angle OMP$ 为钝角, 以点 P 为中心, 将线段 PM 顺时针旋转 150° , 得到线段 PN, 连接 ON.

- (1) 依题意补全图 1;
- (2) 求证: $\angle OMP = \angle OPN$;
- (3) 点 M 关于点 H 的对称点为 Q, 连接 QP. 写出一个 OP 的值, 使得对于任意的点 M 总有 $ON = QP$, 并证明.

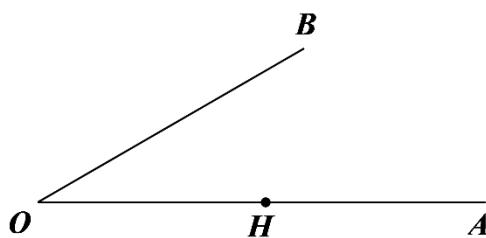
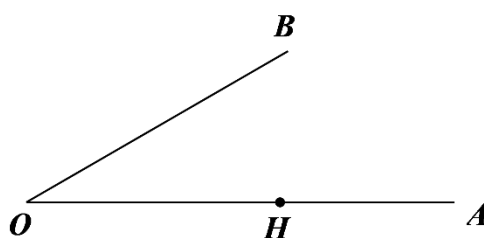


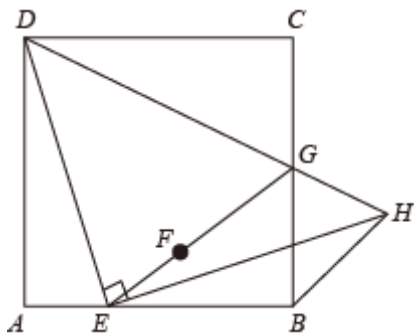
图1



备用图

6. (2018·北京·统考中考真题) 如图, 在正方形 ABCD 中, E 是边 AB 上的一动点 (不与点 A、B 重合), 连接 DE, 点 A 关于直线 DE 的对称点为 F, 连接 EF 并延长交 BC 于点 G, 连接 DG, 过点 E 作 $EH \perp DE$ 交 DG 的延长线于点 H, 连接 BH.

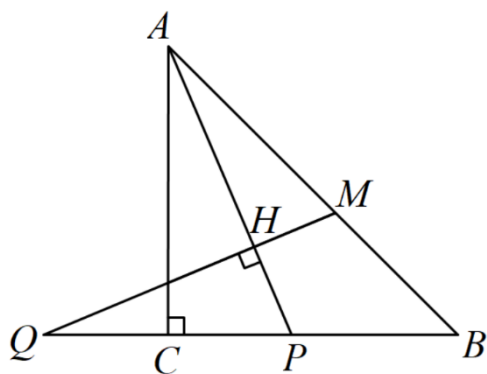
- (1) 求证: $GF = GC$;
- (2) 用等式表示线段 BH 与 AE 的数量关系, 并证明.



7. (2017·北京·中考真题) 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, P 是线段 BC 上一动点(与点 B 、 C 不重合), 连接 AP , 延长 BC 至点 Q , 使得 $CQ=CP$, 过点 Q 作 $QH \perp AP$ 于点 H , 交 AB 于点 M .

(1) 若 $\angle PAC = \alpha$, 求 $\angle AMQ$ 的大小 (用含 α 的式子表示).

(2) 用等式表示线段 MB 与 PQ 之间的数量关系, 并证明.



8. (2016·北京·中考真题) 在等边 $\triangle ABC$ 中,

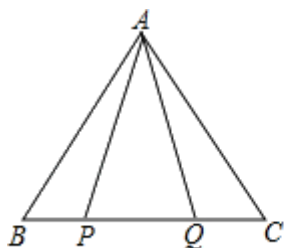


图1

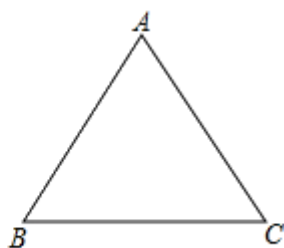


图2

(1) 如图 1, P, O 是 BC 边上的两点, $AP=AQ$, $\angle BAP=20^\circ$, 求 $\angle AOB$ 的度数;

(2) 点 P, Q 是 BC 边上的两个动点 (不与点 B, C 重合), 点 P 在点 Q 的左侧, 且 $AP=AQ$, 点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M , 连接 AM, PM .

①依题意将图 2 补全:

②小茹通过观察、实验提出猜想：在点 P 、 Q 运动的过程中，始终有 $PA=PM$ ，小茹把这个猜想与同学们进行交流，通过讨论，形成了证明该猜想的几种想法：

想法 1: 要证明 $PA=PM$, 只需证 $\triangle APM$ 是等边三角形;

想法 2: 在 BA 上取一点 N , 使得 $BN=BP$, 要证明 $PA=PM$, 只需证 $\triangle ANP \cong \triangle PCM$;

想法 3: 将线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 60° , 得到线段 BK , 要证 $PA=PM$, 只需证 $PA=CK$, $PM=CK$.

请你参考上面的想法，帮助小茹证明 $PA=PM$ （一种方法即可）.

9. (2015·北京·统考中考真题) 在正方形 $ABCD$ 中, BD 是一条对角线. 点 P 在射线 CD 上 (与点 C, D 不

重合), 连接 AP , 平移 $\triangle ADP$, 使点 D 移动到点 C , 得到 $\triangle BCQ$, 过点 Q 作 $QH \perp BD$ 于点 H , 连接 AH 、 PH .

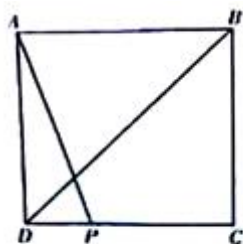
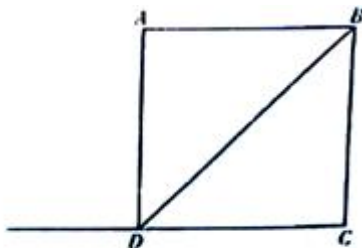


图 1



备用图

(1) 若点 P 在线 CD 上, 如图 1,

①依题意补全图 1; ②判断 AH 与 PH 的数量关系与位置关系并加以证明;

(2) 若点 P 在线 CD 的延长线上, 且 $\angle AHQ = 152^\circ$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 请写出求 DP 长的思路.

(可以不写出计算结果)

参考答案

1. (1)见解析

(2) $\angle AEF = 90^\circ$ ，证明见解析

【分析】(1) 由旋转的性质得 $DM = DE$ ， $\angle MDE = 2\alpha$ ，利用三角形外角的性质求出 $\angle DEC = \alpha = \angle C$ ，可得 $DE = DC$ ，等量代换得到 $DM = DC$ 即可；

(2) 延长 FE 到 H 使 $FE = EH$ ，连接 CH ， AH ，可得 DE 是 $\triangle FCH$ 的中位线，然后求出 $\angle B = \angle ACH$ ，设 $DM = DE = m$ ， $CD = n$ ，求出 $BF = 2m = CH$ ，证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACH$ (SAS)，得到 $AF = AH$ ，再根据等腰三角形三线合一证明 $AE \perp FH$ 即可。

【详解】(1) 证明：由旋转的性质得： $DM = DE$ ， $\angle MDE = 2\alpha$ ，

$$\because \angle C = \alpha，$$

$$\therefore \angle DEC = \angle MDE - \angle C = \alpha，$$

$$\therefore \angle C = \angle DEC，$$

$$\therefore DE = DC，$$

$$\therefore DM = DC，\text{即 } D \text{ 是 } MC \text{ 的中点；}$$

(2) $\angle AEF = 90^\circ$ ；

证明：如图 2，延长 FE 到 H 使 $FE = EH$ ，连接 CH ， AH ，

$$\because DF = DC，$$

$$\therefore DE \text{ 是 } \triangle FCH \text{ 的中位线，}$$

$$\therefore DE \parallel CH，CH = 2DE，$$

由旋转的性质得： $DM = DE$ ， $\angle MDE = 2\alpha$ ，

$$\therefore \angle FCH = 2\alpha，$$

$$\because \angle B = \angle C = \alpha，$$

$$\therefore \angle ACH = \alpha，\triangle ABC \text{ 是等腰三角形，}$$

$$\therefore \angle B = \angle ACH，AB = AC，$$

设 $DM = DE = m$ ， $CD = n$ ，则 $CH = 2m$ ， $CM = m + n$ ，

$$\therefore DF = CD = n，$$

$$\therefore FM = DF - DM = n - m，$$

$$\because AM \perp BC，$$

$$\therefore BM = CM = m + n，$$

$$\therefore BF = BM - FM = m + n - (n - m) = 2m，$$

$$\therefore CH = BF，$$

$$\text{在 } \triangle ABF \text{ 和 } \triangle ACH \text{ 中，} \begin{cases} AB = AC \\ \angle B = \angle ACH \\ BF = CH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACH (\text{SAS}),$$

$$\therefore AF = AH,$$

$$\because FE = EH,$$

$$\therefore AE \perp FH, \text{ 即 } \angle AEF = 90^\circ.$$

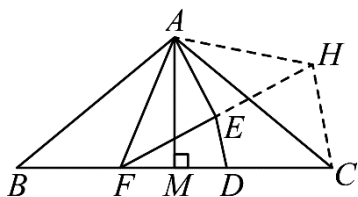


图2

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定和性质，旋转的性质，三角形外角的性质，三角形中位线定理以及全等三角形的判定和性质等知识，作出合适的辅助线，构造出全等三角形是解题的关键.

2. (1)见解析

(2) $CD = CH$; 证明见解析

【分析】(1) 先利用已知条件证明 $\triangle FCE \cong \triangle BCD (\text{SAS})$, 得出 $\angle CFE = \angle CBD$, 推出 $EF \parallel BD$, 再由 $AF \perp EF$ 即可证明 $BD \perp AF$;

(2) 延长 BC 到点 M , 使 $CM = CB$, 连接 EM, AM , 先证 $\triangle MEC \cong \triangle BDC (\text{SAS})$, 推出 $ME = BD$, 通过等量代换得到 $AM^2 = AE^2 + ME^2$, 利用平行线的性质得出 $\angle BHE = \angle AEM = 90^\circ$, 利用直角三角形斜边中线等于斜边一半即可得到 $CD = CH$.

【详解】(1) 证明: 在 $\triangle FCE$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle FCE = \angle BCD, \\ CF = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle BCD (\text{SAS}),$$

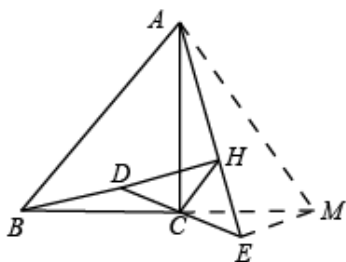
$$\therefore \angle CFE = \angle CBD,$$

$$\therefore EF \parallel BD,$$

$$\because AF \perp EF,$$

$$\therefore BD \perp AF.$$

(2) 解: 补全后的图形如图所示, $CD = CH$, 证明如下:



延长 BC 到点 M , 使 $CM = CB$, 连接 EM, AM ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, CM = CB,$$

$\therefore AC$ 垂直平分 BM ,

$\therefore AB = AM$,

在 $\triangle MEC$ 和 $\triangle BDC$ 中,

$$\begin{cases} CM = CB \\ \angle MCE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle MEC \cong \triangle BDC (\text{SAS}),$

$\therefore ME = BD, \angle CME = \angle CBD,$

$\because AB^2 = AE^2 + BD^2,$

$\therefore AM^2 = AE^2 + ME^2,$

$\therefore \angle AEM = 90^\circ,$

$\because \angle CME = \angle CBD,$

$\therefore BH \parallel EM,$

$\therefore \angle BHE = \angle AEM = 90^\circ$, 即 $\angle DHE = 90^\circ$,

$\because CE = CD = \frac{1}{2}DE,$

$\therefore CH = \frac{1}{2}DE,$

$\therefore CD = CH.$

【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质, 垂直平分线的性质, 平行线的判定与性质, 勾股定理的逆用, 直角三角形斜边中线的性质等, 第二问有一定难度, 正确作辅助线, 证明 $\angle DHE = 90^\circ$ 是解题的关键.

3. (1) $\angle BAE = \angle CAD$, $BM = BE + MD$, 理由见详解; (2) $DN = EN$, 理由见详解.

【分析】 (1) 由题意及旋转的性质易得 $\angle BAC = \angle EAD = \alpha$, $AE = AD$, 然后可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 进而问题可求解;

(2) 过点 E 作 $EH \perp AB$, 垂足为点 Q , 交 AB 于点 H , 由 (1) 可得 $\angle ABE = \angle ACD$, $BE = CD$, 易证 $BH = BE = CD$, 进而可得 $HM = DM$, 然后可得 $\triangle DMN \sim \triangle DHE$, 最后根据相似三角形的性质可求证.

【详解】 (1) 证明: $\because \angle BAC = \angle EAD = \alpha$,

$\therefore \angle BAE + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAD = \alpha$,

$\therefore \angle BAE = \angle CAD$,

由旋转的性质可得 $AE = AD$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$

$\therefore BE = CD$,

$\because$ 点 M 为 BC 的中点,

$\therefore BM = CM$,

【详解】(1) $\because$ D 是 AB 的中点, E 是线段 AC 的中点

$\therefore$ DE 为 $\square ABC$ 的中位线, 且 $CE = AE = a$

$$\therefore DE \parallel BC, \quad DE = \frac{1}{2}BC$$

$$\because \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - \angle C = 90^\circ$$

$$\because DF \perp DE$$

$$\therefore \angle EDF = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 DECF 为矩形

$$\therefore DE = CF$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(BF + CF)$$

$$\therefore CF = BF = b$$

则在 $Rt\square CEF$ 中, $EF = \sqrt{CE^2 + CF^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$;

(2) 过点 B 作 AC 的平行线交 ED 的延长线于点 G, 连接 FG

$$\because BG \parallel AC$$

$$\therefore \angle EAD = \angle GBD, \quad \angle DEA = \angle DGB$$

$\because$ D 是 AB 的中点

$$\therefore AD = BD$$

$$\text{在 } \square EAD \text{ 和 } \triangle GBD \text{ 中, } \begin{cases} \angle EAD = \angle GBD \\ \angle DEA = \angle DGB \\ AD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \square EAD \cong \triangle GBD (AAS)$$

$$\therefore ED = GD, \quad AE = BG$$

$$\text{又 } \because DF \perp DE$$

$\therefore$ DF 是线段 EG 的垂直平分线

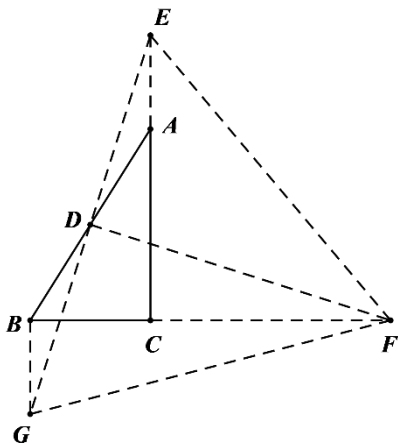
$$\therefore EF = FG$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad BG \parallel AC$$

$$\therefore \angle GBF = \angle C = 90^\circ$$

在 $Rt\square BGF$ 中, 由勾股定理得: $FG^2 = BG^2 + BF^2$

$$\therefore EF^2 = AE^2 + BF^2.$$



【点睛】本题考查了中位线定理、矩形的判定与性质、三角形全等的判定定理与性质、垂直平分线的判定与性质、勾股定理等知识点，较难的是题（2），通过作辅助线，构造全等三角形和直角三角形是解题关键。

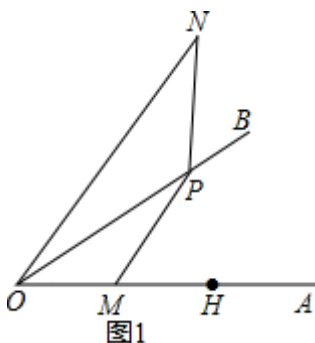
5.（1）如图所示见解析；（2）见解析；（3） $OP=2$.证明见解析.

【分析】（1）根据题意画出图形即可.

（2）由旋转可得 $\angle MPN=150^\circ$ ，故 $\angle OPN=150^\circ-\angle OPM$ ；由 $\angle AOB=30^\circ$ 和三角形内角和 180° 可得 $\angle OMP=180^\circ-30^\circ-\angle OPM=150^\circ-\angle OPM$ ，得证.

（3）根据题意画出图形，以 $ON=QP$ 为已知条件反推 OP 的长度.由（2）的结论 $\angle OMP=\angle OPN$ 联想到其补角相等，又因为旋转有 $PM=PN$ ，已具备一边一角相等，过点 N 作 $NC\perp OB$ 于点 C ，过点 P 作 $PD\perp OA$ 于点 D ，即可构造出 $\triangle PDM\cong\triangle NCP$ ，进而得 $PD=NC$ ， $DM=CP$.此时加上 $ON=QP$ ，则易证得 $\triangle OCN\cong\triangle QDP$ ，所以 $OC=QD$.再设 $DM=CP=x$ ，所以 $OC=OP+PC=2+x$ ， $MH=MD+DH=x+1$ ，由于点 M 、 Q 关于点 H 对称，得出 $DQ=DH+HQ=1+x+1=2+x$ ，得出 $OC=DQ$ ，再利用 SAS 得出 $\triangle OCN\cong\triangle QDP$ 即可

【详解】解：（1）如图1所示为所求.



（2）设 $\angle OPM=\alpha$,

$\because$ 线段 PM 绕点 P 顺时针旋转 150° 得到线段 PN

$\therefore \angle MPN=150^\circ$, $PM=PN$

$\therefore \angle OPN=\angle MPN-\angle OPM=150^\circ-\alpha$

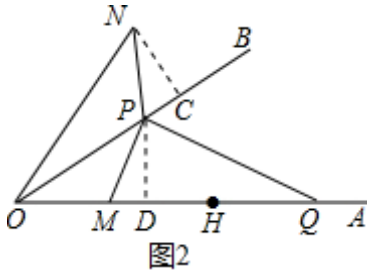
$\because \angle AOB=30^\circ$

$\therefore \angle OMP=180^\circ-\angle AOB-\angle OPM=180^\circ-30^\circ-\alpha=150^\circ-\alpha$

$\therefore \angle OMP=\angle OPN$

(3) $OP=2$ 时, 总有 $ON=QP$, 证明如下:

过点 N 作 $NC \perp OB$ 于点 C , 过点 P 作 $PD \perp OA$ 于点 D , 如图 2



$$\therefore \angle NCP = \angle PDM = \angle PDQ = 90^\circ$$

$$\because \angle AOB = 30^\circ, OP = 2$$

$$\therefore PD = \frac{1}{2}OP = 1$$

$$\therefore OD = \sqrt{OP^2 - PD^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore OH = \sqrt{3} + 1$$

$$\therefore DH = OH - OD = 1$$

$$\because \angle OMP = \angle OPN$$

$$\therefore 180^\circ - \angle OMP = 180^\circ - \angle OPN$$

$$\text{即 } \angle PMD = \angle NPC$$

在 $\triangle PDM$ 与 $\triangle NCP$ 中

$$\begin{cases} \angle PDM = \angle NCP \\ \angle PMD = \angle NPC \\ PM = NP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PDM \cong \triangle NCP \text{ (AAS)}$$

$$\therefore PD = NC, DM = CP$$

设 $DM = CP = x$, 则 $OC = OP + PC = 2 + x$, $MH = MD + DH = x + 1$

$$\because \text{点 } M \text{ 关于点 } H \text{ 的对称点为 } Q$$

$$\therefore HQ = MH = x + 1$$

$$\therefore DQ = DH + HQ = 1 + x + 1 = 2 + x$$

$$\therefore OC = DQ$$

在 $\triangle OCN$ 与 $\triangle QDP$ 中

$$\begin{cases} OC = QD \\ \angle OCN = \angle QDP = 90^\circ \\ NC = PD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCN \cong \triangle QDP \text{ (SAS)}$$

$$\therefore ON = QP$$

【点睛】本题考查了根据题意画图, 旋转的性质, 三角形内角和 180° , 勾股定理, 全等三角形的判定和性质, 中心对称的性质. 第 (3) 题的解题思路是以 $ON=QP$ 为条件反推 OP 的长度, 并结合 (2) 的结论构

造全等三角形；而证明过程则以 $OP=2$ 为条件构造全等证明 $ON=QP$.

6. (1) 证明见解析；(2) $BH=\sqrt{2}AE$ ，理由见解析

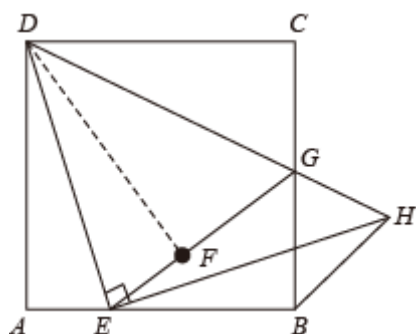
【分析】(1) 连接 DF ．根据对称的性质可得 $AD=FD$ ． $AE=FE$ ．证明 $\triangle ADE \cong \triangle FDE$ ，根据全等三角形的性质得到 $\angle DAE = \angle DFE$ ．进而证明 $\text{Rt}\triangle DCG \cong \text{Rt}\triangle DFG$ ，即可证明；

(2) 在 AD 上取点 M 使得 $AM=AE$ ，连接 ME ．证明 $\square DME \cong \triangle EBH$ ，根据等腰直角三角形的性质即可得到线段 BH 与 AE 的数量关系．

【详解】(1) 证明：连接 DF ．

$\because A, F$ 关于 DE 对称．

$\therefore AD=FD$ ． $AE=FE$ ．



在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FDE$ 中

$$\begin{cases} AD=FD \\ AE=FE, \\ DE=DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FDE$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle DFE$ ．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle A = \angle C = 90^\circ$ ． $AD=CD$ ，

$\therefore \angle DFE = \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DFG = 180^\circ - \angle DFE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DFG = \angle C$ ，

$\because AD=DF$ ， $AD=CD$ ，

$\therefore DF=CD$ ．

在 $\text{Rt}\triangle DCG$ 和 $\text{Rt}\triangle DFG$ 中

$$\begin{cases} DC=DF \\ DG=DG \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle DCG \cong \text{Rt}\triangle DFG$ ，

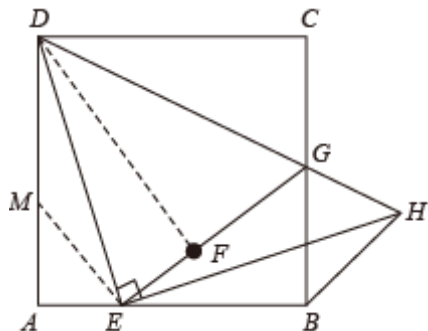
$\therefore CG=FG$ ．

(2) $BH=\sqrt{2}AE$ ．

证明：在 AD 上取点 M 使得 $AM=AE$ ，连接 ME ．

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

∴ $AD = AB$, $\angle A = \angle ADC = 90^\circ$.



∴ $\triangle DAE \cong \triangle DFE$,

∴ $\angle ADE = \angle FDE$.

同理: $\angle CDG = \angle FDG$,

∴ $\angle EDG = \angle EDF + \angle GDF = \frac{1}{2} \angle ADF + \frac{1}{2} \angle CDF = \frac{1}{2} \angle ADC = 45^\circ$

∴ $DE \perp EH$,

∴ $\angle DEH = 90^\circ$,

∴ $\angle EHD = 180^\circ - \angle DEH - \angle EDH = 45^\circ$,

∴ $\angle EHD = \angle EDH$.

∴ $DE = EH$.

∴ $\angle A = 90^\circ$,

∴ $\angle ADE + \angle AED = 90^\circ$.

∴ $\angle DEH = 90^\circ$,

∴ $\angle AED + \angle BEH = 90^\circ$,

∴ $\angle ADE = \angle BEH$.

∴ $AD = AB$, $AM = AE$,

∴ $DM = EB$.

在 $\triangle DME$ 和 $\triangle EBH$ 中 $\begin{cases} DM = EB \\ \angle MDE = \angle BEH \\ DE = EH \end{cases}$

∴ $\triangle DME \cong \triangle EBH$,

∴ $ME = BH$,

在 $\text{Rt}\triangle AME$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AE = AM$.

∴ $ME = \sqrt{AE^2 + AM^2} = \sqrt{2}AE$,

∴ $BH = \sqrt{2}AE$.

【点睛】本题是四边形的综合题,考查了正方形的性质,轴对称的性质,全等三角形的性质与判定,勾股定理,等腰直角三角形的性质与判定等知识,此题综合性较强,难度较大,注意掌握辅助线的作法,注意

数形结合思想的应用.

7. (1) $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$; (2) 线段 MB 与 PQ 之间的数量关系: $PQ = \sqrt{2} MB$, 理由见解析.

【分析】(1) 由直角三角形性质, 两锐角互余, 可得 $\angle AMQ = 180^\circ - \angle AHM - \angle PAM$, 解得 $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$;
(2) 由题意得 $AP = AQ = QM$, 再证 $Rt\triangle APC \cong Rt\triangle QME$, 全等三角形对应边相等得出 $PC = ME$, 得出 $\triangle MEB$ 为等腰直角三角形, 则 $PQ = \sqrt{2} MB$.

【详解】(1) $\angle AMQ = 45^\circ + \alpha$. 理由如下:

$\because \angle PAC = \alpha$, $\triangle ACB$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle PAB = 45^\circ - \alpha$, $\angle AHM = 90^\circ$,

$\therefore \angle AMQ = 180^\circ - \angle AHM - \angle PAM = 45^\circ + \alpha$;

(2) 线段 MB 与 PQ 之间的数量关系: $PQ = \sqrt{2} MB$.

理由如下:

连接 AQ , 过点 M 作 $ME \perp QB$,

$\because AC \perp QP$, $CQ = CP$,

$\therefore \angle QAC = \angle PAC = \alpha$,

$\therefore \angle QAM = \alpha + 45^\circ = \angle AMQ$,

$\therefore AP = AQ = QM$,

在 $Rt\triangle APC$ 和 $Rt\triangle QME$ 中,

$$\begin{cases} \angle MQE = \angle PAC \\ \angle ACP = \angle QEM \\ AP = QM \end{cases}$$

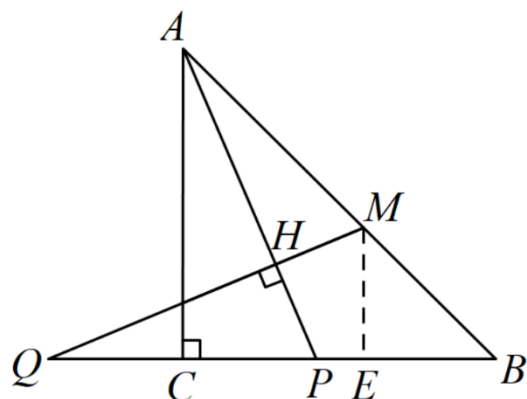
$\therefore Rt\triangle APC \cong Rt\triangle QME$,

$\therefore PC = ME$,

$\therefore \triangle MEB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \frac{1}{2} PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} MB,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{2} MB.$$



8. (1) 80° ; (2) ①补图见解析; ② 证明见解析

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质得到 $\angle APQ = \angle AQP$, 由邻补角的定义得到 $\angle APB = \angle AQC$, 根据三角

形外角的性质即可得到结论；

(2) ①根据要求作出图形，如图 2；

②根据等腰三角形的性质得到 $\angle APQ = \angle AQP$ ，由邻补角的定义得到 $\angle APB = \angle AQC$ ，由点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M ，得到 $AQ = AM$ ， $\angle QAC = \angle MAC$ ，等量代换得到 $\angle MAC = \angle BAP$ ，推出 $\triangle APM$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质即可得到结论．

【详解】解：(1) $\because AP = AQ$ ，

$$\therefore \angle APQ = \angle AQP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AQC,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAQ = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AQB = \angle CAQ + \angle C = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ;$$

(2) ①如图 2；

② $\because AP = AQ$ ，

$$\therefore \angle APQ = \angle AQP,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AQC,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CAQ,$$

$\because$ 点 Q 关于直线 AC 的对称点为 M ，

$$\therefore AQ = AM, \angle QAC = \angle MAC,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle BAP,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle PAC = \angle MAC + \angle CAP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PAM = 60^\circ,$$

$$\because AP = AQ,$$

$$\therefore AP = AM,$$

$\therefore \triangle APM$ 是等边三角形，

$$\therefore AP = PM.$$

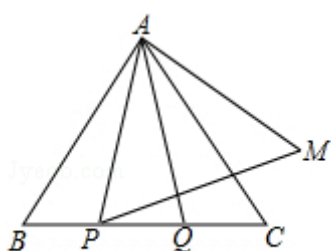


图2

9. (1) ①如图；② $AH = PH$ ， $AH \perp PH$ ．证明见解析 (2) $\tan 28^\circ$ 或 $\frac{1 - \tan 17^\circ}{1 + \tan 17^\circ}$

【详解】试题分析：（1）①如图（1）；②（1）法一：轴对称作法，判断：AH=PH，AH⊥PH. 连接CH，根据正方形的每条对角线平分一组对角得：△DHQ 等腰 Rt△，根据平移的性质得 DP=CQ，证得△HDP≌△HQC，全等三角形的对应边相等得 PH=CH，等边对等角得∠HPC=∠HCP，再结合 BD 是正方形的对称轴得出∠AHP=180°-∠ADP=90°，∴AH=PH 且 AH⊥PH. 四点共圆作法，同上得：∠HPC=∠DAH，∴A、D、P、H 共向，∴∠AHP=90°，∠APH=∠ADH=45°，∴△APH 等腰 Rt△.

（2）轴对称作法同（1）作 HR⊥PC 于 R，∵∠AHQ=152°，∴∠AHB=62°，∴∠DAH=17°

∴∠DCH=17°. 设 DP=x，则 $DR=HR=RQ=\frac{1-x}{2}$. 由 $\tan 17^\circ = \frac{HR}{CR}$ 代入 HR，CR 解方程即可得出 x 的值.

四点共圆作法，A、H、D、P 共向，∴∠APD=∠AHB=62°，∴ $PD = \frac{AD}{\tan 62^\circ} = \frac{1}{\tan 62^\circ} = \tan 28^\circ$.

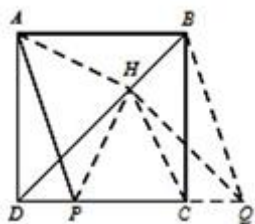
试题解析：（1）①

法一：轴对称作法，判断：AH=PH，AH⊥PH

证：连接 CH，得：△DHQ 等腰 Rt△，又∵DP=CQ，∴△HDP≌△HQC，∴PH=CH，∠HPC=∠HCP

BD 为正方形 ABCD 对称轴，∴AH=CH，∠DAH=∠HCP，∴AH=PH，∠DAH=∠HPC，∴∠AHP=180°-∠ADP=90°，∴AH=PH 且 AH⊥PH.

法二：四点共圆作法，同上得：∠HPC=∠DAH，∴A、D、P、H 共向，∴∠AHP=90°，∠APH=∠ADH=45°，∴△APH 等腰 Rt△.



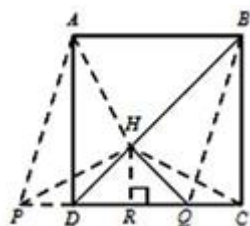
（2）法一：轴对称作法

考虑△DHQ 等腰 Rt△，PD=CQ，作 HR⊥PC 于 R，∵∠AHQ=152°，∴∠AHB=62°，∴∠DAH=17°

∴∠DCH=17°. 设 DP=x，则 $DR=HR=RQ=\frac{1-x}{2}$.

由 $\tan 17^\circ = \frac{HR}{CR}$ 得： $\frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1+x}{2}} = \tan 17^\circ$ ，∴ $x = \frac{1 - \tan 17^\circ}{1 + \tan 17^\circ}$. 即 $PD = \frac{1 - \tan 17^\circ}{1 + \tan 17^\circ}$

法二：四点共圆作法，A、H、D、P 共向，∴∠APD=∠AHB=62°，∴ $PD = \frac{AD}{\tan 62^\circ} = \frac{1}{\tan 62^\circ} = \tan 28^\circ$.



考点：全等三角形的判定；解直角三角形；正方形的性质；四点共圆