2013-2023 北京中考真题数学专项练习
圆（上）章节综合

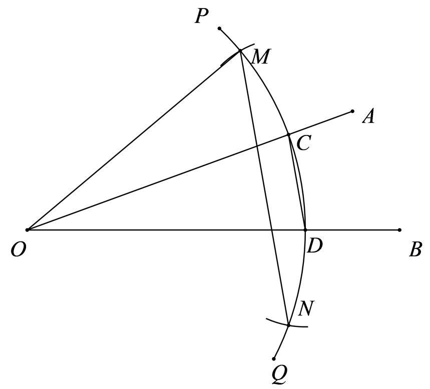
一、单选题

1.（2019 北京中考真题）已知锐角∠AOB 如图，（1）在射线 OA 上取一点 C，以点 O 为圆心，OC 长为半径作$\overset{\frown}{PQ}$，交射线 OB 于点 D，连接 CD；

（2）分别以点 C，D 为圆心，CD 长为半径作弧，交$\overset{\frown}{PQ}$于点 M，N；

（3）连接 OM，MN．

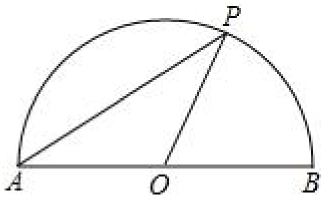
根据以上作图过程及所作图形，下列结论中错误的是（　）

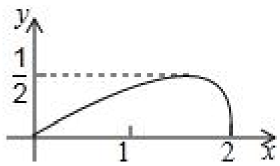


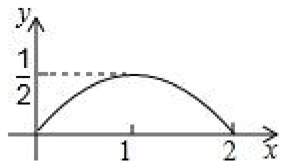
A．∠COM=∠COD　　B．若 OM=MN，则∠AOB=20°

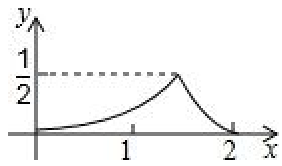
C．MN∥CD　　D．MN=3CD

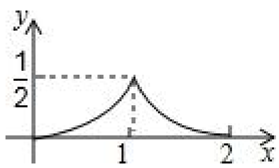
2.（2013 北京中考真题）如图，点 P 是以 O 为圆心，AB 为直径的半圆上的动点，AB=2，设弦 AP 的长为 x，△APO 的面积为 y，则下列图象中，能表示 y 与 x 的函数关系的图象大致是



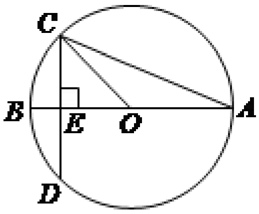
A． 

B． 

C． 

D． 

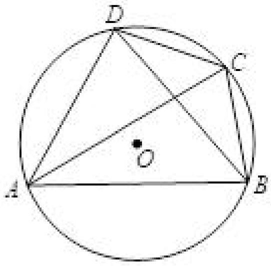
3.（2014 北京中考真题）如图⊙O 的直径 AB 垂直于弦 CD，垂足是 E，$\angle A=22.5°$，$OC=4$，CD 的长为（ ）



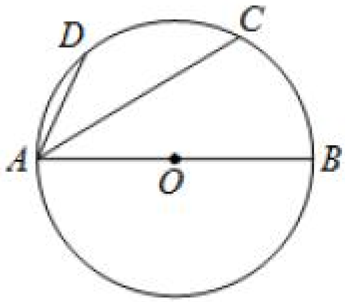
A． $2\sqrt{2}$　　B． 4　　C． $4\sqrt{2}$　　D． 8

二、填空题

4．（2018 北京中考真题）如图，点 A，B，C，D 在 $\odot O$ 上，$\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{CD}$，$\angle CAD=30°$，$\angle ACD=50°$，则 $\angle ADB=$________．

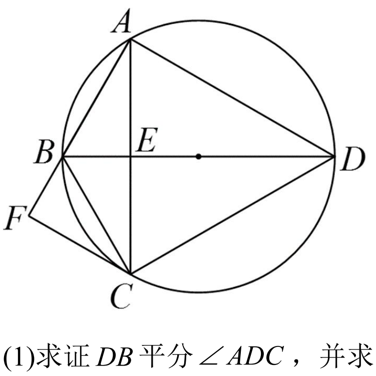


5．（2017 北京中考真题）如图，AB 为⊙O 的直径，C、D 为⊙O 上的点，AD=CD．若∠CAB=40°，则∠CAD=__________．



三、证明题

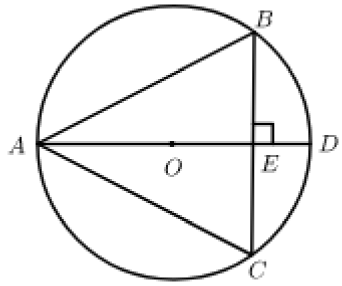
6．（2023 北京中考真题）如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 E，BD 平分 $\angle ABC$，$\angle BAC=\angle ADB$．



(1)求证 DB 平分 $\angle ADC$，并求 $\angle BAD$ 的大小；

(2)过点 C 作 $CF\parallel AD$ 交 AB 的延长线于点 F．若 $AC=AD$，$BF=2$，求此圆半径的长．

7．（2021 北京中考真题）如图，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，AD 是 $\odot O$ 的直径，$AD\perp BC$ 于点 E．



（1）求证：$\angle BAD=\angle CAD$；

（2）连接BO并延长，交AC于点F，交$\odot O$于点G，连接GC．若$\odot O$的半径为5，$OE=3$，求GC和OF的长．

四、作图题

8．（2020北京中考真题）已知：如图，△ABC为锐角三角形，AB=AC，CD∥AB．

求作：线段BP，使得点P在直线CD上，且∠ABP=$\frac{1}{2}\angle BAC$．

作法：①以点A为圆心，AC长为半径画圆，交直线CD于C，P两点；②连接BP．线段BP就是所求作线段．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明．

证明：∵CD∥AB，

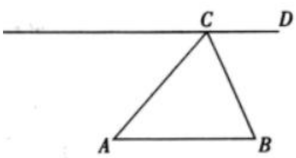
∴∠ABP=_．

∵AB=AC，

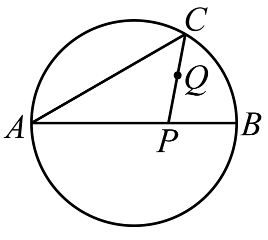
∴点B在⊙A上．

又∵∠BPC=$\frac{1}{2}$∠BAC（_）（填推理依据）

∴∠ABP=$\frac{1}{2}$∠BAC



9．（2018北京中考真题）如图，Q是$\overset{\frown}{AB}$与弦AB所围成的图形的内部的一定点，P是弦AB上一动点，连接PQ并延长交$\overset{\frown}{AB}$于点C，连接AC．已知$AB=6\text{cm}$，设A，P两点间的距离为x cm，P，C两点间的距离为$y_1$cm，A，C两点间的距离为$y_2$cm．



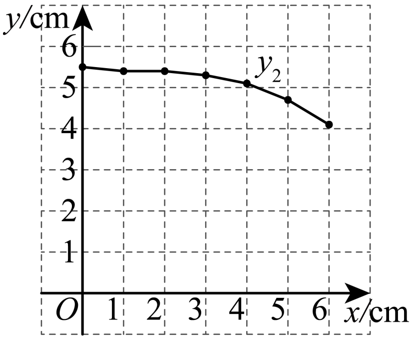
小腾根据学习函数的经验，分别对函数y_1，y_2随自变量x的变化而变化的规律进行了探究．

下面是小腾的探究过程，请补充完整：

（1）按照下表中自变量 x 的值进行取点、画图、测量，分别得到了 y_1，y_2 与 x 的几组对应值；

x / cm	0	1	2	3	4	5	6
y_1 / cm	5.62	4.67	3.76		2.65	3.18	4.37
y_2 / cm	5.62	5.59	5.53	5.42	5.19	4.73	4.11

（2）在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出补全后的表中各组数值所对应的点（x，y_1），（x，y_2），并画出函数 y_1，y_2 的图象；



（3）结合函数图象，解决问题：当△APC 为等腰三角形时，AP 的长度约为____cm .

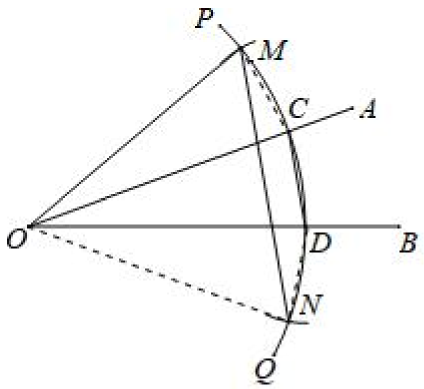
参考答案

1．D

【分析】由作图知 CM=CD=DN，再利用圆周角定理、圆心角定理逐一判断可得．

【详解】解：由作图知 CM=CD=DN，

∴∠COM=∠COD，故 A 选项正确；



∵OM=ON=MN，

∴△OMN 是等边三角形，

∴∠MON=60°，

∵CM=CD=DN，

∴∠MOA=∠AOB=∠BON=$\frac{1}{3}$∠MON=20°，故 B 选项正确；

∵∠MOA=∠AOB=∠BON，

∴∠OCD=∠OCM=$\frac{180°-\angle COD}{2}$，

∴∠MCD=180°-∠COD，

又∠CMN=$\frac{1}{2}$∠AON=∠COD，

∴∠MCD+∠CMN=180°，

∴MN∥CD，故 C 选项正确；

∵MC+CD+DN＞MN，且 CM=CD=DN，

∴3CD＞MN，故 D 选项错误；

故选 D．

【点睛】本题主要考查作图-复杂作图，解题的关键是掌握圆心角定理和圆周角定理等知识点．

2．A

【详解】**方法 1**（特殊位置法）：

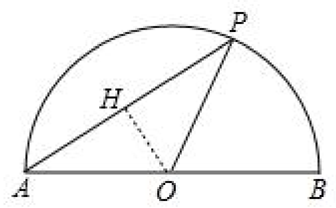
当 $AP=OA=OP$ 时，$\triangle APO$ 为等边三角形，此时 $AP=1$，AP 边上的高可求得为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，则

$S_{\triangle APO}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}>\frac{1}{4}$，故选 A．

方法 2（求函数解析式）：

设 AP 的中点为 H，作 $OH \perp AP$，如图所示．若 $AP = x$，则利用勾股定理可求 $OH = \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$，

此时 $S_{\triangle APO} = \frac{1}{2} \times x \times \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$．代入特殊值，如令 $x = 1$，则 $S_{\triangle APO} = \frac{\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{4}$，故选 A．



3．C

【详解】∵直径 AB 垂直于弦 CD，

∴$CE=DE=\frac{1}{2}CD$，

∵$\angle A=22.5°$，

∴$\angle BOC=45°$，

∴$OE=CE$，

设 $OE=CE=x(x>0)$，

∵$OC=4$，

∴$x^2+x^2=16$，

解得：$x=2\sqrt{2}$，

即：$CE=2\sqrt{2}$，

∴$CD=4\sqrt{2}$，

故选：C．

4．70°

【分析】根据 $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{CD}$，得到 $\angle CAB = \angle CAD = 30°$，根据同弧所对的圆周角相等即可得到 $\angle ABD = \angle ACD = 50°$，根据三角形的内角和即可求出.

【详解】∵ $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{CD}$，

∴ $\angle CAB = \angle CAD = 30°$，

∴ $\angle BAD = 60°$，

∵ $\angle ABD = \angle ACD = 50°$，

∴ $\angle ADB = 180° - \angle BAD - \angle ABD = 70°$．

故答案为70°.

【点睛】考查圆周角定理和三角形的内角和定理，熟练掌握圆周角定理是解题的关键.

5．25°

【详解】∵AB 是⊙O 的直径，C，D 为⊙O 上的点，∴∠ACB=90°， ∵∠CAB=40°，

∴$\angle$CBA=50°，　∵AD=CD，　∴$\angle$CBD=$\angle$DBA=$\frac{1}{2}$ $\angle$CBA=$\frac{1}{2}$ ×50°=25°，

∴$\angle$CAD=$\angle$CBD=25°，

故答案为25°.

6．(1)见解析，$\angle BAD=90^\circ$

(2)4

【分析】(1)根据已知得出$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，则$\angle ADB=\angle CDB$，即可证明$DB$平分$\angle ADC$，进而根据$BD$平分$\angle ABC$，得出$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，推出$\overset{\frown}{BAD}=\overset{\frown}{BCD}$，得出$BD$是直径，进而可得$\angle BAD=90^\circ$；

（2）根据（1）的结论结合已知条件得出，$\angle F=90^\circ$，$\triangle ADC$是等边三角形，进而得出$\angle CDB=\frac{1}{2}\angle ADC=30^\circ$，由$BD$是直径，根据含30度角的直角三角形的性质可得$BC=\frac{1}{2}BD$，在Rt$\triangle BFC$中，根据含30度角的直角三角形的性质求得$BC$的长，进而即可求解.

【详解】（1）解：∵$\angle BAC=\angle ADB$

∴$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，

∴$\angle ADB=\angle CDB$，即DB平分$\angle ADC$.

∵BD平分$\angle ABC$，

∴$\angle ABD=\angle CBD$，

∴$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，

∴$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}$，即$\overset{\frown}{BAD}=\overset{\frown}{BCD}$，

∴BD是直径，

∴$\angle BAD=90^\circ$；

（2）解：∵$\angle BAD=90^\circ$，$CF\parallel AD$，

∴$\angle F+\angle BAD=180^\circ$，则$\angle F=90^\circ$.

∵$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，

∴$AD=DC$.

∵$AC=AD$，

∴$AC=AD=CD$，

∴$\triangle ADC$是等边三角形，则$\angle ADC=60^\circ$.

∵BD平分$\angle ADC$，

∴$\angle CDB=\frac{1}{2}\angle ADC=30^\circ$.

∵BD是直径，

∴$\angle BCD=90^\circ$，则$BC=\frac{1}{2}BD$.

∵四边形$ABCD$是圆内接四边形，

∴$\angle ADC+\angle ABC=180^\circ$，则$\angle ABC=120^\circ$，

$\therefore \angle FBC = 60°$，

$\therefore \angle FCB = 90° - 60° = 30°$，

$\therefore FB = \frac{1}{2}BC$．

$\because BF = 2$，

$\therefore BC = 4$，

$\therefore BD = 2BC = 8$．

$\because BD$是直径，

$\therefore$此圆半径的长为$\frac{1}{2}BD = 4$．

【点睛】本题考查了弧与圆周角的关系，等弧所对的圆周角相等，直径所对的圆周角是直角，含30度角的直角三角形的性质，等边三角形的性质与判定，圆内接四边形对角互补，熟练掌握以上知识是解题的关键．

7．（1）见详解；（2）$GC = 6$，$OF = \frac{25}{11}$

【分析】（1）由题意易得$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，然后问题可求证；

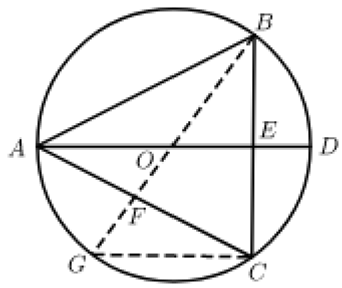
（2）由题意可先作图，由（1）可得点E为BC的中点，则有$OE = \frac{1}{2}CG, OE // CG$，进而可得$\triangle AOF \backsim \triangle CGF$，然后根据相似三角形的性质可进行求解．

【详解】（1）证明：$\because AD$是$\odot O$的直径，$AD \perp BC$，

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$；

（2）解：由题意可得如图所示：



由（1）可得点E为BC的中点，

$\because$点O是BG的中点，

$\therefore OE = \frac{1}{2}CG, OE // CG$，

$\therefore \triangle AOF \backsim \triangle CGF$，

$\therefore \frac{OA}{CG} = \frac{OF}{GF}$，

$\because OE = 3$，

$\therefore CG = 6$，

∵ $\odot O$ 的半径为 5，

∴ $OA = OG = 5$，

∴ $\frac{5}{6} = \frac{OF}{GF}$，

∴ $OF = \frac{5}{11}OG = \frac{25}{11}$.

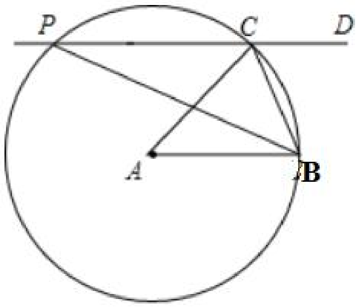
【点睛】本题主要考查垂径定理、三角形中位线及相似三角形的性质与判定，熟练掌握垂径定理、三角形中位线及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

8.（1）见解析；（2）∠BPC，在同圆或等圆中同弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半

【分析】（1）按照作法的提示，逐步作图即可；

（2）利用平行线的性质证明：$\angle ABP = \angle BPC$，再利用圆的性质得到：∠BPC=$\frac{1}{2}$∠BAC，从而可得答案.

【详解】解：（1）依据作图提示作图如下：



（2）证明：∵CD∥AB，

∴∠ABP=_$\angle BPC$_.

∵AB=AC，

∴点 B 在⊙A 上.

又∵∠BPC=$\frac{1}{2}$∠BAC（<u>在同圆或等圆中同弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半.</u>）（填推理依据）

∴∠ABP=$\frac{1}{2}$∠BAC

故答案为：∠BPC；在同圆或等圆中同弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半.

【点睛】本题考查的是作图中复杂作图，同时考查了平行线的性质，圆的基本性质：在同圆或等圆中同弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半．掌握以上知识是解题的关键.

9.（1）3.00；（2）作图见解析；（3）3.00 或 4.83 或 5.88 .

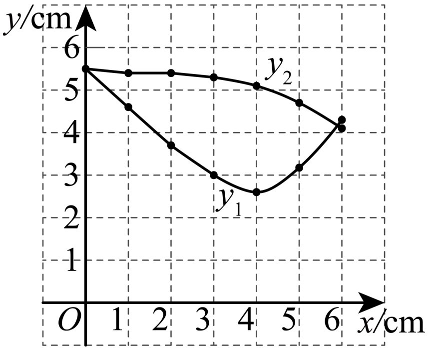
【分析】（1）当 $x=3$ 时，PC 即为圆的半径.

（2）根据（1）中的图表，描点，连线即可.

（3）根据等腰三角形的性质，结合函数图象进行回答即可.

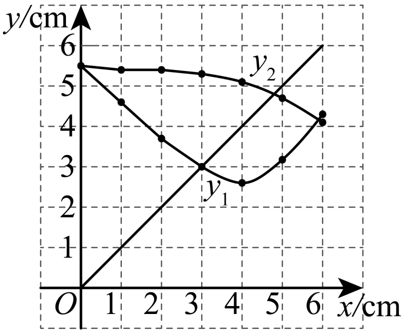
【详解】解：（1）3.00

（2）如下图所示：



（3）3.00或4.83或5.88．

如下图所示，函数图象的交点的横坐标即为所求．



【点睛】考查动点产生的函数图象问题，函数探究,圆的性质，等腰三角形的性质等，熟练掌握函数图象以及性质是解题的关键.