

八年级数学

2025.7

注意事项

1. 本试卷共 8 页，共两部分，四道大题，26 道小题。其中第一大题至第三大题为必做题，满分 100 分。第四大题为选做题，满分 10 分，计入总分，但卷面总分不超过 100 分。考试时间 100 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校、班级、姓名和学号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束，请将考试材料一并交回。

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 下列各式中，是最简二次根式的是

(A) $\sqrt{9}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

(D) $\sqrt{18}$

2. 以下列各组数为三角形的三边长，能构成直角三角形的是

(A) 2, 2, 2

(B) 2, 3, $\sqrt{6}$

(C) 1, 1, $\sqrt{2}$

(D) 2, 3, 4

3. 下列计算中正确的是

(A) $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$

(B) $6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5$

(C) $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = 16$

(D) $\sqrt{27} \div \sqrt{3} = 3$

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ 两点在直线 $y = 3x - 5$ 上，下列判断正确的是

(A) $y_1 < y_2$

(B) $y_1 = y_2$

(C) $y_1 > y_2$

(D) $y_1 \geq y_2$

5. 下列命题中，不正确的是

(A) 平行四边形的对角线互相平分

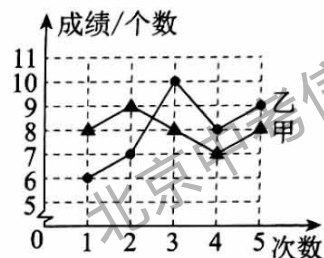
(B) 矩形的对角线互相垂直且平分

(C) 菱形的对角线互相垂直且平分

(D) 正方形的对角线相等且互相垂直平分

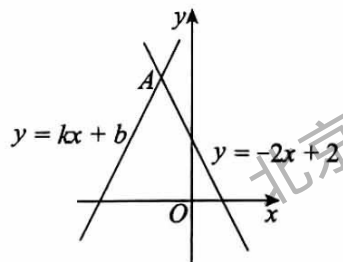
6. 如图是甲、乙两名同学的5次引体向上练习成绩的折线统计图，下列判断正确的是

- (A) 甲的成绩比乙的成绩稳定
(B) 甲的最好成绩比乙的最好成绩高
(C) 甲的成绩的平均数比乙的成绩的平均数大
(D) 甲的成绩的中位数比乙的成绩的中位数大



7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -2x + 2$ 与直线 $y = kx + b$ (k, b 为常数, $k \neq 0$) 的交点为 $A(m, 4)$ ，则关于 x 的不等式 $-2x + 2 < kx + b$ 的解集为

- (A) $x < -2$ (B) $x > -2$
(C) $x < -1$ (D) $x > -1$

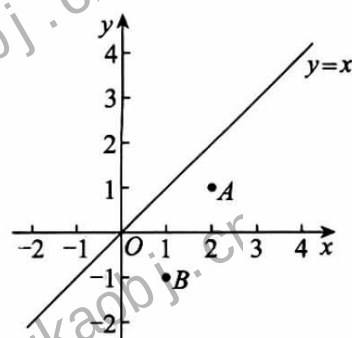


8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $A(2, 1)$ ， $B(1, -1)$ ，点 P 在直线 $y = x$ 上，有以下结论：

- ①当点 P 的坐标为 $(1, 1)$ 时， $PA + PB$ 取得最小值；
②当点 P 的坐标为 $(1, 1)$ 时， $PA + PB$ 取得最大值；
③当点 P 的坐标为 $(2.5, 2.5)$ 时， $|PA - PB|$ 取得最大值；
④当点 P 的坐标为 $(0.5, 0.5)$ 时， $|PA - PB|$ 取得最小值。

上述结论中，所有正确结论的序号是

- (A) ①③ (B) ①④
(C) ②③ (D) ②④



第二部分 非选择题

二、填空题 (共 16 分，每题 2 分)

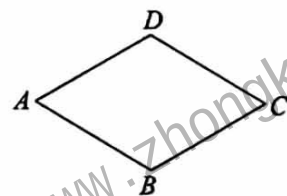
9. 若 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是_____。

10. 在 $\square ABCD$ 中，若 $\angle A = 3\angle B$ ，则 $\angle D =$ _____°。

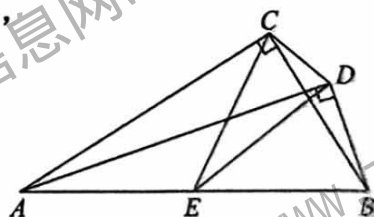
11. 请写出一个图象过原点且 y 随 x 的增大而减小的一次函数解析式：_____。

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，将直线 $y = 2x + 1$ 向下平移 2 个单位长度，所得到的直线的解析式为_____。

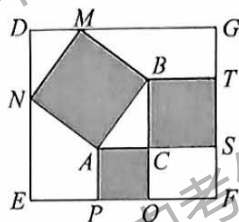
13. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 6， $\angle BAD = 60^\circ$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积等于_____。



14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ ，点 C 和点 D 位于边 AB 的同侧， E 为边 AB 的中点，连接 EC ， ED ， CD ，若 $\angle CED = 26^\circ$ ，则 $\angle CDE =$ _____°。



15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=3$, $BC=4$. 以 AC , BC , AB 为边分别向外作正方形 $ACQP$, 正方形 $BCST$, 正方形 $ABMN$, 过点 M , N 分别作 $DG \parallel PQ$, $DE \parallel ST$, 再适当延长相关线段得到四边形 $DEFG$, 那么四边形 $DEFG$ 的面积等于_____.



16. 如图 1, DB 是矩形 $ABCD$ 的对角线, 点 P 从点 D 出发, 沿 $D \rightarrow B \rightarrow C$ 在线段 DB 和 BC 上运动, 运动到与点 C 重合时停止 (当两点重合时, 记连接这两点所得线段的长度为 0). 作 $PQ \perp CD$, 垂足为点 Q . 记点 P 的运动路程为 x , 线段 PQ 与 DQ 长度的差为 y , 即 $PQ - DQ = y$. 图 2 反映了点 P 运动的过程中, y 与 x 之间的对应关系, 那么 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$, 图 2 中点 E 的坐标为_____.

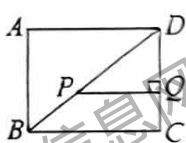


图 1

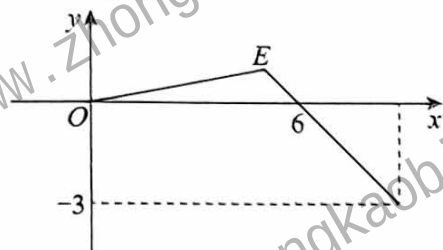


图 2

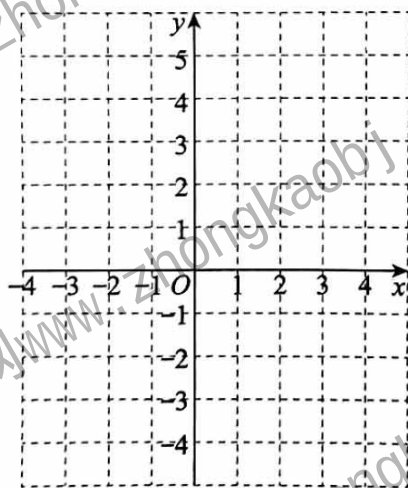
三、解答题 (共 68 分, 第 17 题 8 分, 第 18 题 10 分, 第 19 题 7 分, 第 20~22 题, 每题 8 分, 第 23 题 10 分, 第 24 题 9 分)

17. 计算:

(1) $\sqrt{8} + \sqrt{5} \times \sqrt{10}$; (2) $(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1) - \sqrt{(-2)^2}$.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(3, 3)$ 和 $(0, -3)$.

- (1) 求该一次函数的解析式;
- (2) 在所给平面直角坐标系中画出该函数的图象;
- (3) 求直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 直线 $y = -x$ 与 x 轴围成的三角形的面积.



19. 已知: 如图, $\angle MAN$.

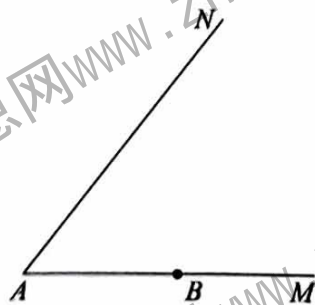
求作: 射线 AC , 使得 AC 平分 $\angle MAN$.

作法: ①在射线 AM 上取点 B , 以点 A 为圆心, 线段 AB 的长为半径画弧, 交射线 AN 于点 D ;

②分别以点 B , 点 D 为圆心, 线段 AB 的长为半径画弧, 两弧交于点 C (不与点 A 重合),

③作射线 AC .

射线 AC 就是所求作的射线.



(1) 使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下面的证明。

证明：连接 BC , CD .

$$\because AB = AD = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是 (填“矩形”“菱形”或“正方形”)

() (填推理的依据).

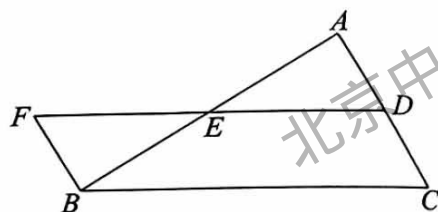
$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$ () (填推理的依据).

即 AC 平分 $\angle MAN$.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D , E 分别是 AC , AB 的中点，连接 DE 并延长到点 F ，使 $DF=BC$ ，连接 BF .

(1) 求证：四边形 $BCDF$ 是平行四边形；

(2) 连接 BD , FA ，若 $BD=6$ ，求线段 FA 的长.



21. 小高同学在学习“勾股定理”时，向全班展示了他通过查阅相关资料学到的证明思路和证明过程，具体如下.

制作学具：两张直角三角形纸片 ABC 和 DEF ，其中 $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$ ， $BC = EF = a$ ， $AC = DF = b$ ($a < b$)， $AB = DE = c$.

证明思路：将两张纸片按如图所示方式摆放并固定，使纸片 DEF 的边 EF 落在纸片 ABC 的边 AC 上，点 E 与点 C 重合，连接 AD , DB 得到四边形 $ACBD$ ，利用四边形 $ACBD$ 的面积的不同表示方法证明 $a^2 + b^2 = c^2$.

请根据小高同学的思路补全以下证明过程.

证明：如图，作 $DG \perp CB$ ，垂足为点 G ，设 AB 与 CD 的交点为 H .

$$\because BC = EF, AC = DF, AB = DE,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

$$\therefore \angle CAB = \angle \underline{\hspace{1cm}}.$$

$$\because \angle FDE + \angle ACH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle \underline{\hspace{1cm}} = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AHC = 90^\circ.$$

$$\therefore AB \perp CD.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACBD} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times AB \times \underline{\hspace{1cm}} + \frac{1}{2} \times AB \times \underline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2} \times AB \times \underline{\hspace{1cm}} = \frac{1}{2} c^2.$$

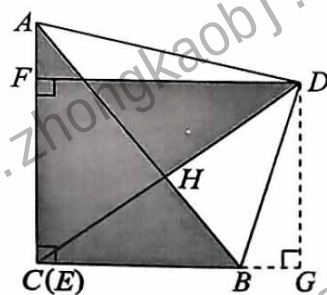
$$\because \angle CFD = \angle FCB = \angle G = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FCGD$ 为矩形.

$$\therefore DG = FC = a.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACBD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times AC \times \underline{\hspace{1cm}} + \frac{1}{2} \times BC \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$



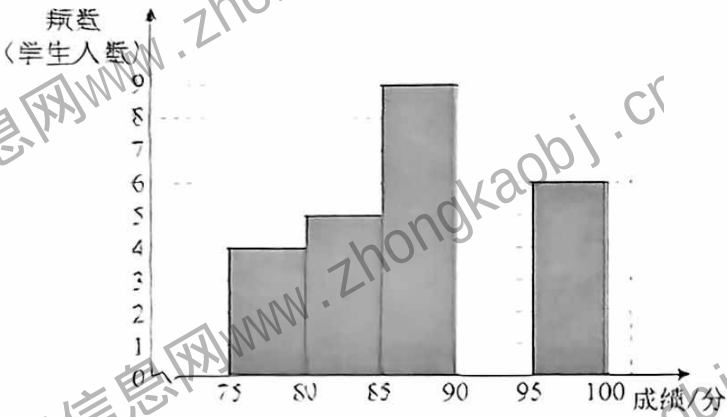
姓名
学号
学校
班级
线
内
要
答
题

22. 某校为了解七年级和八年级学生的体育与健康知识掌握情况，从这两个年级的学生中各随机抽取了 30 名学生进行有关测试，获得了这些学生的成绩（成绩用 x 表示，满分 100 分），并对数据（成绩）进行了整理、描述和分析，下面给出了部分信息。

a. 抽取的七年级学生测试成绩：

65 68 72 72 75 78 80 81 82 82 83 83 84 84 85
85 86 86 86 87 88 89 91 93 95 96 97 98 99 100

b. 抽取的八年级学生测试成绩的频数分布直方图（数据分成 5 组： $75 \leq x < 80$ ， $80 \leq x < 85$ ， $85 \leq x < 90$ ， $90 \leq x < 95$ ， $95 \leq x \leq 100$ ）：



c. 抽取的八年级学生测试成绩在 $85 \leq x < 90$ 这一组的是：

85 85 86 87 87 88 89 89 89

d. 抽取的七、八年级学生测试成绩的平均数、中位数、众数如下：

	平均数	中位数	众数
七年级	85	85	m
八年级	88	n	89

根据以上信息解答下列问题：

- (1) 请补全频数分布直方图；
- (2) 表中 $m = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $n = \underline{\hspace{1cm}}$ ；
- (3) 在此次测试中，七、八年级各有学生考了 88 分，这个成绩在哪个年级排名更靠前？回答并说明理由；
- (4) 此次测试成绩 85 分及 85 分以上为优秀，若该校八年级有 300 名学生，假设八年级的学生都参加此次测试，估计八年级学生成绩优秀的人数。

23. 小明探究函数 $y=|2x+4|$ 的图象和性质的过程如下. 请将小明的探究过程补充完整, 并解决问题.

(1) 函数 $y=|2x+4|$ 的自变量 x 的取值范围是_____, y 的取值范围是_____;

(2) 由 $y=|2x+4|=\begin{cases} 2x+4, & x \geq -2, \\ -(2x+4), & x < -2 \end{cases}$ 设计如下画图方案:

将直线 $y=2x+4$ 在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折, 直线的其余部分保持不变, 得到函数 $y=|2x+4|$ 的图象. 在平面直角坐标

系 xOy 中画出函数 $y=|2x+4|$ 的图象;

(3) 利用函数图象解决问题:

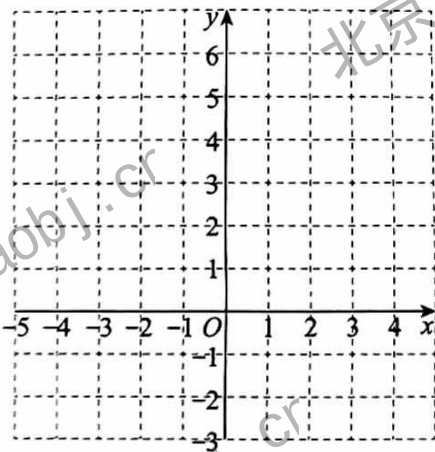
①当 $x > 0$ 时, y 的取值范围是_____;

②当 $y \geq 2$ 时, x 的取值范围是_____;

③若对于 x 的每一个值, 函数 $y=kx+1$ ($k \neq 0$)

的值都小于函数 $y=|2x+4|$ 的值, 直接写出

k 的取值范围.



24. 在矩形 $ABCD$ 中, AB, BC 两边的长满足 $AB < BC < 2AB$, $\angle BAD$ 的平分线交边 BC 于点 E . $DH \perp AE$ 于点 H , 连接 DE, BH , 线段 BH 的延长线交 DE 于点 F , 交 DC 于点 G .

(1) 如图 1, 当 $AH=AB$ 时, 求证: $DH=DC$;

(2) 如图 2, 当 $AH \neq AB$ 时,

①求证: 点 H 为线段 BG 的中点;

②用等式表示线段 BG 与 DE 的数量关系, 并证明.

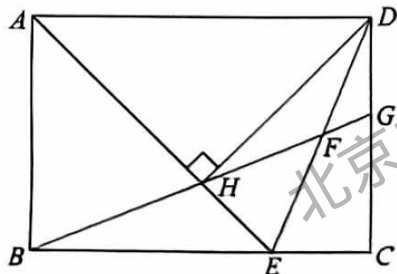


图 1

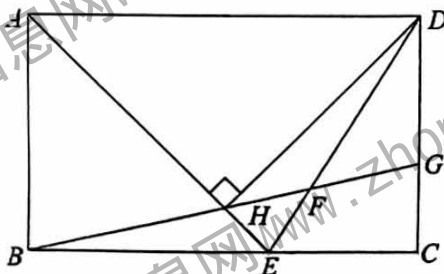


图 2

四、选做题（共 10 分，第 25 题 4 分，第 26 题 6 分）

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，以方程 $y=kx+b$ 的解为坐标 (x,y) 的点在直线 $y=kx+b$ 上；

反过来，直线 $y=kx+b$ 上的点的坐标 (x,y) 是方程 $y=kx+b$ 的解。

以不等式 $y>kx+b$ 的解为坐标 (x,y) 的点在直线 $y=kx+b$ 的上方；反过来，在直线 $y=kx+b$ 的上方的点的坐标 (x,y) 是不等式 $y>kx+b$ 的解。

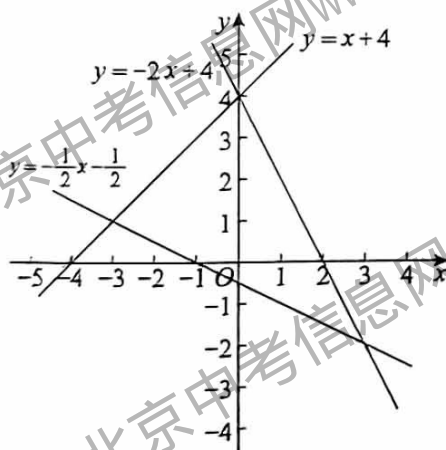
以不等式 $y<kx+b$ 的解为坐标 (x,y) 的点在直线 $y=kx+b$ 的下方；反过来，在直线 $y=kx+b$ 的下方的点的坐标 (x,y) 是不等式 $y<kx+b$ 的解。

如图，已知直线 $y=x+4$ ，直线 $y=-2x+4$ 和直线 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 。

(1) 点 $(0,0)$ 在直线 $y=-2x+4$ 的_____方，点 $(1,5)$ 在直线 $y=-2x+4$ 的_____方（填“上”或“下”）；

(2) 以不等式组 $\begin{cases} y \leq x+4, \\ y \leq -2x+4, \\ y \geq -\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \end{cases}$ 的解为坐标的点的全体记为图形 M 。已知直线 $y=m$ (m

为实数) 与图形 M 的公共部分为线段 AB (点 A 可与点 B 重合)，若对于线段 AB 上的任一点 P ，在线段 AB 上都存在点 Q ，使得 $PQ=1$ ，则 m 的取值范围是_____。



26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于对角线交点为原点 O 的正方形和它的边上任意一点 P , 给出如下定义: 记点 P 所在边的中点为 M , 线段 OM 的长度为 m ($m > 0$). 将线段 OP 沿射线 OM 的方向平移 m 个单位长度得到线段 MQ , 以点 M 为顶角顶点, 分别作顶角都为 150° 的等腰三角形 MQE 和等腰三角形 MQF , 连接 EF . 若线段 EF 上的点都在该正方形的内部或边上, 则称点 P 为该正方形的“美好点”.

已知正方形 $ABCD$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, 2)$, $B(-2, -2)$, $C(2, -2)$, $D(2, 2)$.

(1) 如图 1, 点 P 在边 AD 上,

①在点 $P_1(-1.5, 2)$, $P_2(0, 2)$ 中, 点_____是正方形 $ABCD$ 的“美好点”;

②若点 E, F 的横坐标满足 $x_E < x_F$, 当 $\angle AME = 30^\circ$ 时, 点 P 的坐标为_____;

(2) 若直线 $y = kx$ 上存在正方形 $ABCD$ 的“美好点”, 则 k 的取值范围是_____;

(3) 如图 2, 与正方形 $ABCD$ 大小相同的正方形 $A'B'C'D'$ 的顶点在坐标轴上. 若直线 $y = x + b$ 上既存在正方形 $ABCD$ 的“美好点”又存在正方形 $A'B'C'D'$ 的“美好点”, 请直接写出 b 的取值范围.

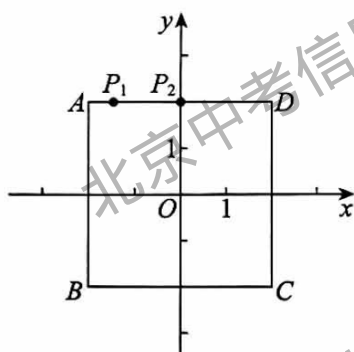


图 1

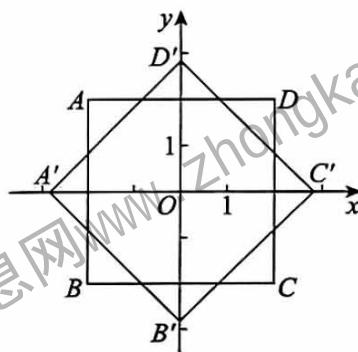


图 2

八年级数学答案及评分参考

2025.7

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	B	A	D	B

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. $x \geq 1$ 10. 45
 11. 答案不唯一，如 $y = -x$ 12. $y = 2x - 1$
 13. $18\sqrt{3}$ 14. 77
 15. 110 16. 3, (5,1)

三、解答题（共 68 分，第 17 题 8 分，第 18 题 10 分，第 19 题 7 分，第 20~22 题，每题 8 分，第 23 题 10 分，第 24 题 9 分）

17. 解：(1) $\sqrt{8} + \sqrt{5} \times \sqrt{10}$
 $= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ 3 分
 $= 7\sqrt{2}$ 4 分
 (2) $(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1) - \sqrt{(-2)^2}$
 $= (2\sqrt{3})^2 - 1^2 - 2$ 3 分
 $= 9$ 4 分

18. 解：(1) $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 (3,3) 和 (0,-3),

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 3, \\ b = -3. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2, \\ b = -3. \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式是 } y = 2x - 3. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

- (2) 该一次函数的图象如图 1 所示. 6 分

- (3) 设直线 $y = 2x - 3$ 与 x 轴的交点为 A ，与直线 $y = -x$ 的交点为 B .

$$\text{对于一次函数 } y = 2x - 3, \text{ 令 } y = 0, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以点 } A \text{ 的坐标为 } A\left(\frac{3}{2}, 0\right). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

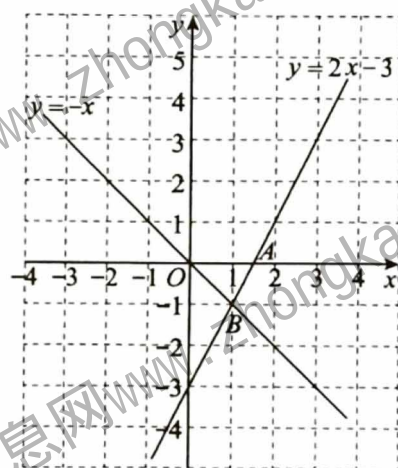


图 1

解方程组 $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = -x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$ 8分

所以点 B 的坐标为 $B(1, -1)$9分

设所求三角形的面积为 S .

所以 $S = \frac{1}{2} \times OA \times |y_B| = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$10分

19. (1) 解: 作图如图 2 所示.2分

(2) 证明: 连接 BC , CD .

$\because AB = AD = \underline{BC} = \underline{CD}$,4分

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是 菱形5分

(四条边相等的四边形是菱形).6分

$\therefore AC$ 平分 $\angle BAD$

(菱形的每一条对角线平分一组对角).

.....7分

即 AC 平分 $\angle MAN$.

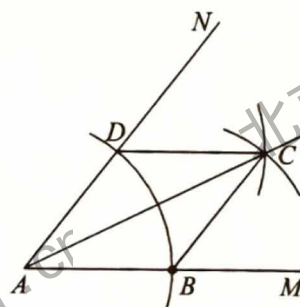


图 2

20. 如图 3.

(1) 证明: $\because$ 点 D , E 分别是 AC , AB 的中点,

$\therefore DE \parallel BC$2分

$\because$ 点 F 在 DE 的延长线上,

$\therefore DF \parallel BC$.

$\because DF = BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形.4分

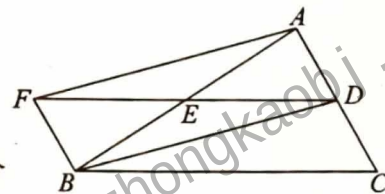


图 3

(2) 解: $\because$ 四边形 $BCDF$ 是平行四边形,

$\therefore BF \parallel CD$, $BF = CD$5分

$\because$ 点 D 是 AC 的中点,

$\therefore AD = CD$.

$\therefore BF = AD$.

$\therefore$ 四边形 $FBDA$ 是平行四边形.7分

$\therefore FA = BD$.

$\because BD = 6$,

$\therefore FA = 6$8分

21. 证明：如图 4，作 $DG \perp CB$ ，垂足为点 G ，设 AB 与 CD 的交点为 H 。

$$\because BC=EF, AC=DF, AB=DE,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

$$\therefore \angle CAB = \angle FDE. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because \angle FDE + \angle ACH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ACH = 90^\circ. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \angle AHC = 90^\circ.$$

$$\therefore AB \perp CD.$$

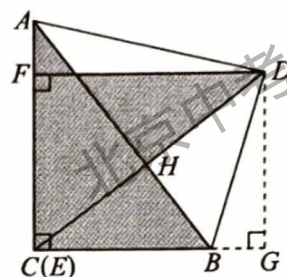


图 4

$$\therefore S_{\text{四边形}ACBD} = S_{\triangle ACB} + S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times AB \times CH + \frac{1}{2} \times AB \times DH \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times CD = \frac{1}{2} c^2. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\because \angle CFD = \angle FCB = \angle G = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FCGD$ 为矩形。

$$\therefore DG = FC = a.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACBD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times AC \times DF + \frac{1}{2} \times BC \times DG \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} a^2. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

22. 解：(1) 补全频数分布直方图如图 5； $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

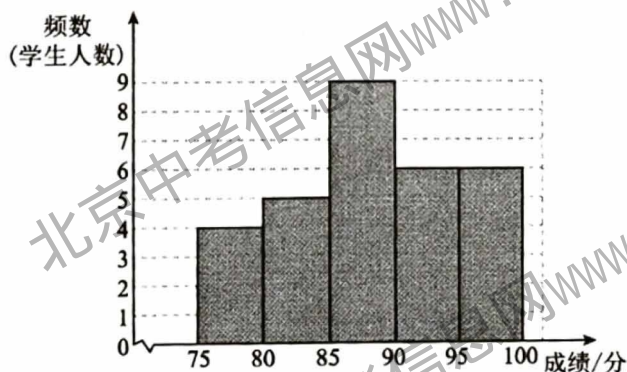


图 5

(2) 86, 88.5; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(3) 这个成绩在七年级排名更靠前，理由如下：88 大于七年级样本数据的中位数 85，说明 88 分排在七年级的前 15 名；88 小于八年级样本数据的中位数 88.5，说明 88 分排在八年级的后 15 名； $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(4) $300 \times \frac{21}{30} = 210. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

23. 解: (1) 全体实数, $y \geq 0$; 2 分

(2) 所画函数图象如图 6 所示; 4 分

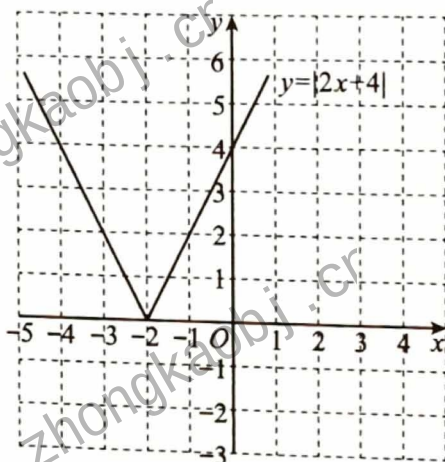


图 6

(3) ① $y > 4$; 6 分

② $x \leq -3$ 或 $x \geq -1$; 8 分

③ $\frac{1}{2} < k \leq 2$ 10 分

24. (1) 证明: 如图 7.

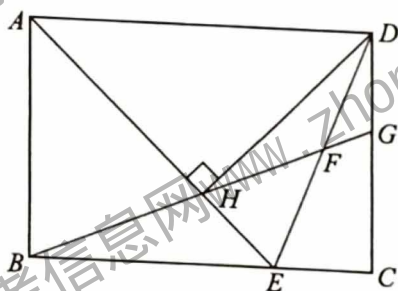


图 7

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,
 $\therefore AB = DC$, $\angle BAD = 90^\circ$.
 $\because$ $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E ,
 $\therefore \angle HAD = \angle BAE = 45^\circ$.
 $\because DH \perp AE$,
 $\therefore \angle DHA = 90^\circ$.
 $\therefore \angle ADH = 45^\circ$.
 $\therefore \angle ADH = \angle HAD$.
 $\therefore AH = DH$ 1 分
 $\because AH = AB$,
 $\therefore DH = DC$ 2 分

(2) ①证明: 如图 8, 连接 HC .

已证 $\angle BAE = \angle EAD = 45^\circ$, $AB = DC$, $AH = DH$.

$$\therefore \angle CDH = \angle ADC - \angle ADH = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CDH.$$

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle DCH$3 分

$\therefore BH=CH.$ 4 分

$$\therefore \angle HBC = \angle HCB.$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HBC + \angle BGC = 90^\circ,$$

$$\angle HCB + \angle HCG = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BGC = \angle HCG.$$

$$\therefore CH=GH.$$

$\therefore BH = GH$, 即点 H 为线段 BG 的中点.5 分

② $BG = \sqrt{2}DE$ 6 分

证明：如图 9，连接 HC ，取 DE 的中点 M ，连接 MH ， MC 。

$\therefore \angle DHE = \angle DCE = 90^\circ$, DE 的中点为 M ,

$$\therefore MH = \frac{1}{2}DE, \quad MC = \frac{1}{2}DE.$$

$$\therefore MD = \frac{1}{2} DE,$$

$\therefore MD=MH=MC$7 分

$$\therefore \angle HDM = \angle MHD, \angle CDM = \angle MCD.$$

$\therefore \angle HME, \angle CME$ 分别是 $\triangle DMH, \triangle DMC$ 的外角,

$$\therefore \angle HME = \angle HDM + \angle MHD = 2\angle HDM,$$

$$\angle CME = \angle CDM + \angle MCD = 2\angle CDM.$$

$$\therefore \angle HMC = \angle HME + \angle CME = 2\angle CDH = 90^\circ. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore HC = \sqrt{MH^2 + MC^2} = \sqrt{2}MH.$$

$$\therefore BG = 2HC, \quad DE = 2MH,$$

$$\therefore BG = \sqrt{2}DE. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

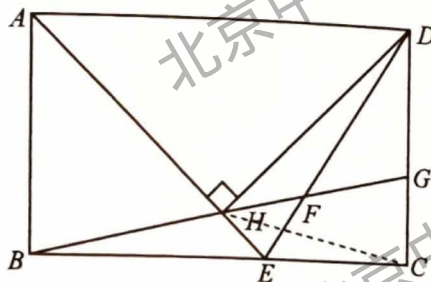


图 8

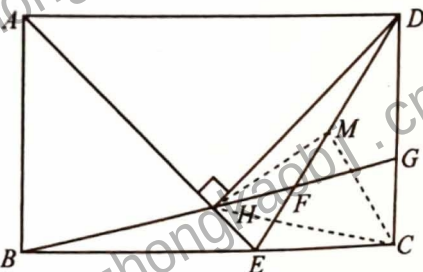


图 9

四、选做题（共 10 分，第 25 题 4 分，第 26 题 6 分）

25. 解：（1）下，上； 2 分

（2） $-\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{8}{3}$ 4 分

26. 解：（1）① P_2 ； 1 分

② $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$ ； 2 分

（2） $k \leq -\sqrt{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k \geq \sqrt{3}$ ； 4 分

（3） $-\frac{2\sqrt{6}}{3} \leq b \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2$ 或 $2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq b \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $b = \pm 2\sqrt{2}$ 6 分