

练习题

第 I 部分

1. 用 2、0、2、4 这四个数字可以组成_____个不同的四位数.

【考查内容】排列组合

【答案】9

【解析】0 不能放在首位, 有 3 种可能的情况, 剩下三个位置中放 2 个 2, 有 $C_3^2 = 3$ 种可能的情况, 剩下一个位置只能放 4, 因此这四个数字可以组成 $3 \times 3 = 9$ 个不同的四位数.

2. 六位数 $\overline{2024\square\square}$ 是 72 的倍数, 该六位数的最后两位是_____.

【考查内容】整除

【答案】64

【解析】设该六位数的最后两位是 $\overline{AB}$, 由于 $72 = 8 \times 9$, 则 $\overline{2024AB}$ 是 8 和 9 的倍数, 那么 $\overline{4AB}$ 是 8 的倍数, $2+0+2+4+A+B=8+A+B$ 是 9 的倍数.

若 $A+B=1$, 枚举可得 $\overline{4AB}$ 均不是 8 的倍数;

若 $A+B=10$, 枚举可得只有 464 是 8 的倍数.

因此该六位数的最后两位是 64.

3. 现有 7 个不同的正整数, 从小到大排列构成等差数列, 已知前三个数的和是 300, 后四个数的平均数是 240, 那么中间的数是_____.

【考查内容】等差数列

【答案】180

【解析】设 7 个不同的正整数从小到大为 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, 可得 $a_1 + a_2 + a_3 = 300$,

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 4 \times 240 = 960$, 那么 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1260$, 因此中间的数是 $1260 \div 7 = 180$.

4. 将 2024 个棱长为 1 的立方体木块堆成一个大长方体, 那么, 所堆成的大长方体的表面积最小可能值是_____.

【考查内容】立体几何

【答案】1050

【解析】设大长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 可得 $a \times b \times c = 2024$, 且大长方体的

表 面 积 为 $2 \times (a \times b + a \times c + b \times c) = 2 \times \left(\frac{2024}{c} + \frac{2024}{b} + \frac{2024}{a} \right)$,

$2024 = 2^3 \times 11 \times 23$, 因此大长方体的表面积最小可能值是

$$2 \times \left(\frac{2024}{8} + \frac{2024}{11} + \frac{2024}{23} \right) = 1050.$$

5. 计算: $234 \times \frac{359}{3} + 0.\dot{6}4\dot{1} \times 78 \times 999$ 的结果是_____.

【考查内容】分数与循环小数

【答案】78000

【解析】原式 $= 78 \times 359 + \frac{641}{999} \times 78 \times 999 = 78 \times 359 + 78 \times 641 = 78 \times (359 + 641) = 78000$.

6. 在算式 $A \times B \times C \times D \times E + \overline{FG} - \overline{HI} = 2024$ 中, 相同的字母代表相同的数字, 不同的字母代表不同的数字, 且满足 $A < B < C < D < E$, 那么五位数 $\overline{EFGHI}$ 的值是_____.

【考查内容】横式问题

【答案】96052

【解析】移项可得 $A \times B \times C \times D \times E = 2024 + \overline{HI} - \overline{FG}$, 则 $A \times B \times C \times D \times E$ 的最小值为

$2024 + 10 - 98 = 1936$, 最大值为 $2024 + 98 - 10 = 2112$, 显然 A, B, C, D, E 一定含有 1 或 2 ($3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 2520 > 2112$).

若 $A = 2$, 则 $E = 8$ 或 $E = 9$ ($2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 1680 < 1936$).

当 $E = 9$ 时, $108 \leq B \times C \times D \leq 117$, 可得 $B = 3$, $36 \leq C \times D \leq 39$, 不符合条件;

当 $E = 8$ 时, $121 \leq B \times C \times D \leq 132$, 可得 $D = 7$, $18 \leq B \times C \leq 18$, 因此 $B = 3$,

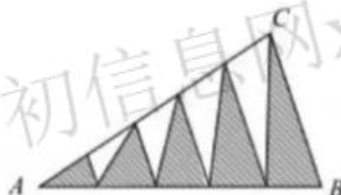
$C = 6$, 那么 $\overline{FG} - \overline{HI} = 2024 - 2 \times 3 \times 6 \times 7 \times 8 = 8$, 枚举可得均不符合条件.

若 $A = 1$, 则 $E = 9$ ($1 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 1680 < 1936$), $216 \leq B \times C \times D \leq 234$, 可

得 $D = 8$, $27 \leq B \times C \leq 29$, 因此 $B = 4$, $C = 7$. 那么

$\overline{FG} - \overline{HI} = 2024 - 1 \times 4 \times 7 \times 8 \times 9 = 8$ ，枚举可得 $60 - 52 = 8$ 符合条件，因此五位数的值是 96052。

7. 如图，在三角形 ABC 中， AB 、 AC 两边分别被分成 5 等份。已知阴影部分的总面积比空白部分的总面积多 2024，则三角形 ABC 的面积是_____。



【考查内容】 等高模型

【答案】 10120

【解析】 设最左边的阴影三角形面积为 1 份，由等高模型可得，从左到右三角形的面积依次为 1 份、1 份、2 份、2 份、3 份、3 份、4 份、4 份、5 份，阴影部分的总面积为 15 份，空白部分的总面积为 10 份，因此三角形 ABC 的面积是 $2024 \div (15 - 10) \times (15 + 10) = 2024 \times 5 = 10120$ 。

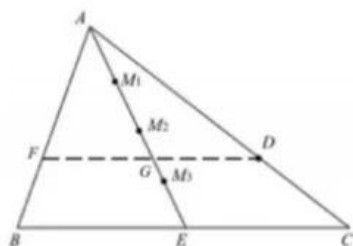
8. 如图，三角形 ABC 中， $BE = EC$ ，在 D 处有一根鱼骨头， D 是 AC 边上靠近 C 的三等分点，在 AE 上有三个近视镜 M_1 、 M_2 、 M_3 ，这三个近视镜是 AE 边的四等分点。有一只近视的猫从 A 跑向 B ，当猫、其中一个近视镜、鱼骨头同时处于一条直线上时，猫才能看到鱼骨头。由于近视的猫方向感较弱，它从 A 出发后向 B 跑 5 秒，再调头向 A 跑 2 秒，再调头向 B 跑 5 秒，再调头向 A 跑 2 秒，……依此类推，当猫跑到 B 点后，它便不再向回跑，而直接沿 BC 边跑向鱼骨头。如果猫每秒跑 1 米， $AB = 130$ 米，那么猫在 AB 段上跑动时一共可以看到_____次鱼骨头。



【考查内容】 燕尾模型

【答案】 8

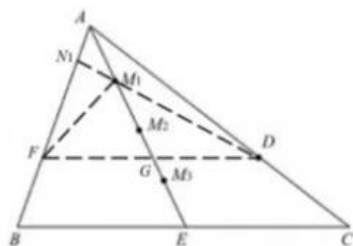
【解析】 过点 D 作 DF 平行于 BC 交 AE 于点 G ，如图所示：



延长 DM_1 交 AB 于点 N_1 , 连接 FM_1 , 由题意得, $FG = DG$, $AM_1 = \frac{1}{4}AE$, 由

金字塔模型可得, $\frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{AM_1}{M_1G} = \frac{3}{5}$, 由燕尾模型可得,

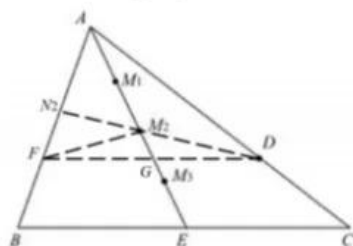
$\frac{AN_1}{N_1F} = \frac{3}{5+5} = \frac{3}{10}$, 因此 $AN_1 = 130 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{13} = 20$ 米.



延长 DM_2 交 AB 于点 N_2 , 连接 FM_2 , 由题意得, $FG = DG$, $AM_2 = \frac{1}{2}AE$,

由金字塔模型可得, $\frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{AM_2}{M_2G} = 3$, 由燕尾模型可得,

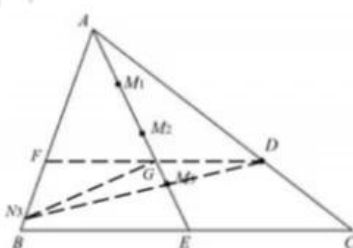
$\frac{AN_2}{N_2F} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$, 因此 $AN_2 = 130 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = 52$ 米.



延长 DM_3 交 AB 于点 N_3 , 连接 GN_3 , 由题意得, $FG = DG$, $AM_3 = \frac{3}{4}AE$, 由

金字塔模型可得, $\frac{AD}{AC} = \frac{AG}{AE} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{AG}{GM_3} = 8$, 由燕尾模型可得,

$\frac{AF}{FN_3} = \frac{8}{1+\frac{9}{7}} = \frac{7}{2}$, 因此 $AN_3 = 130 \times \frac{2}{3} \times \frac{9}{7} = 111\frac{3}{7}$ 米.



对于 N_1 , 经过 $(20-5) \div 3 = 5$ 个周期后向 B 跑 5 米第一次看到, 再调头向 A 跑

2 米, 再调头向 B 跑 2 米第二次看到, 一共可以看到 2 次鱼骨头.

对于 N_2 , 经过 $(52-5) \div 3 < 16$ 个周期后向 B 跑 4 米第一次看到, 再跑 1 米, 再调头向 A 跑 1 米第二次看到, 再跑 1 米, 再调头向 B 跑 1 米第三次看到, 一共可以看到 3 次鱼骨头.

对于 N_3 , 经过 $\left(111\frac{3}{7}-5\right) \div 3 < 36$ 个周期后向 B 跑 $3\frac{3}{7}$ 米第一次看到, 再跑 $1\frac{4}{7}$ 米, 再调头向 A 跑 $1\frac{4}{7}$ 米第二次看到, 再跑 $\frac{3}{7}$ 米, 再调头向 B 跑 $\frac{3}{7}$ 米第三次看到, 一共可以看到 3 次鱼骨头.

因此猫在 AB 段上跑动时一共可以看到 $2+3+3=8$ 次鱼骨头.

9. 一天, 甲乙两人分别从 A 、 B 两地同时出发相向而行, 当甲乙第一次迎面相遇时, 刚好遇到正从 B 向 A 行走的丙. 相遇后乙立即调头向 B 地行走, 速度变为之前的 5 倍, 当乙回到 B 地时, 丙也刚好到达 A 地, 此时丙立即调头再向 B 走, 而乙也立即调头并以原速向 A 走. 当甲乙第二次迎面相遇时, 也刚好遇到了向 B 行走的丙. 如果此时乙距离 B 地 300 米, 那么此时乙距离 A 地_____米.

【考查内容】行程问题

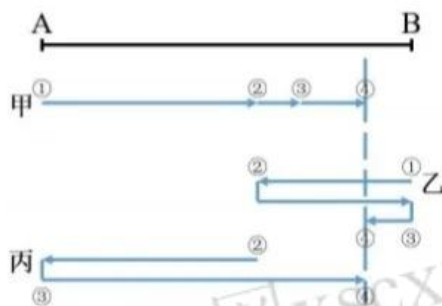
【答案】2100

【解析】如图所示, 由“路程相同, 时间和速度成反比”可得, 乙①~②的时间是②~③时间的 5 倍, 即甲①~②的时间是丙②~③时间的 5 倍, 由于路程相同, 那么丙的速度是甲的 5 倍.

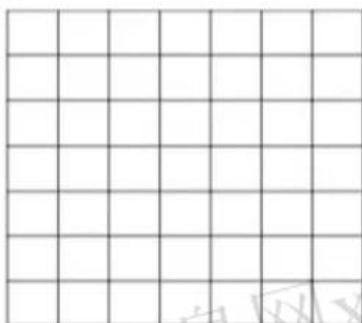
设甲①~②的路程为 10 份, 则甲②~③的路程为 2 份, 在过程③~④中, 丙和甲发生追及, 路程差是 $10+2=12$ 份, 因为丙的速度是甲的 5 倍, 由“时间相同, 路程和速度成正比”可得, 甲③~④的路程为 $12 \div (5-1) \times 1 = 3$ 份, 丙③~④的路程为 $3 \times 5 = 15$ 份.

由“速度相同, 路程和时间成正比”可得, 甲①~②的时间是甲③~④时间的 $\frac{10}{3}$ 倍, 那么乙①~②的时间也是乙③~④时间的 $\frac{10}{3}$ 倍, 乙①~②的路程也是乙③~④路程的 $\frac{10}{3}$ 倍, 那么乙③~④的路程为 $(2+3) \div 7 \times 3 = \frac{15}{7}$ 份.

因此此时乙距离 A 地 $300 \div \frac{15}{7} \times 15 = 2100$ 米.



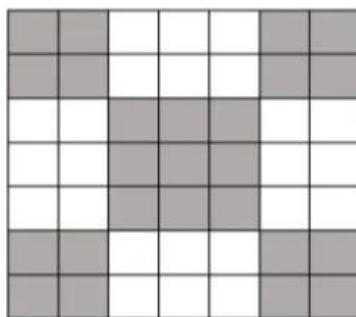
10. 在 7×7 的棋盘的每个格子中都放入了一枚棋子，现在取走 N 枚棋子，使得剩下的棋子中再也没有“五子连珠”（横，横， 45° 斜的五颗连续棋子）。那么， N 最小是_____。



【考查内容】构造论证

【答案】9

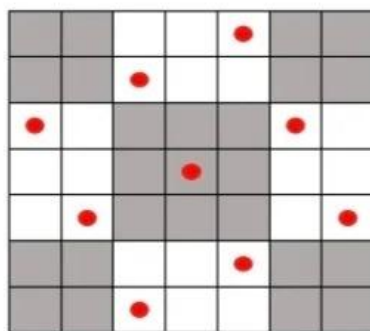
【解析】最少要取走 9 枚棋子，才可能满足要求。证明如下：



如上图所示，每一行的前 5 个格子中必须各取走 1 枚棋子，那么后两列的前 5 个格子中也必须各取走 1 枚棋子，此时正好取走 9 枚棋子。

观察发现 9 枚棋子没有分布在右下角阴影部分，根据对称性可得，9 枚棋子也不会分布在左上角、左下角和右上角阴影部分。那么四个空白部分各会有 2 枚棋子，中间阴影部分会有 1 枚棋子。

由于四个空白部分的格子都没有在大正方形的对角线上，可以确定中间阴影部分的棋子在正中心，尝试易得四个空白部分的棋子如下图所示，此时剩下的棋子中再也没有“五子连珠”。



第Ⅱ部分

11. 判断正确的一项为_____.

- A. 自然数比正整数多了 0, 所以所有自然数的数量比所有正整数的数量更“多”
- B. 所有二进制数的数量和所有 16 进制数的数量“一样多”
- C. 所有无穷数都“一样多”
- D. 并不所有的无穷数都一样大, 但目前还没有什么办法来比较无穷数的大小

【考查内容】 材料型阅读

【答案】 B

【解析】 将所有二进制数和所有 16 进制数分别从小到大排成一列, 易得所有二进制数和所有 16 进制数可以建立“一一对应”的关系, 因此所有二进制数的数量和所有 16 进制数的数量“一样多”.

12. 判断正确的一项为_____.

- A. 100 以内的正分数的数量和 10000 以内的正整数的数量“一样多”
- B. 100 以内的正分数的数量和 10000 以内的正分数的数量“一样多”
- C. 100 以内的正小数的数量和 10000 以内的正分数的数量“一样多”
- D. 100 以内的正整数的数量和 10000 以内的正整数的数量“一样多”

【考查内容】 材料型阅读

【答案】 B

【解析】 排除法, 易得 ACD 错误.

13. 判断错误的一项为_____.

- A. 所有偶数的数量和正整数的数量“一样多”，所有完全平方数的数量和正整数的数量也“一样多”，所以所有偶数的数量和所有完全平方数的数量“一样多”
- B. 所有质数的数量和正整数的数量“一样多”，所有奇数的数量和正整数的数量也“一样多”，所以所有质数的数量和所有奇数的数量“一样多”
- C. 所有正分数的数量和正整数的数量“一样多”，而所有正有限小数有有限个，所以所有正分数的数量比所有正有限小数的数量更“多”
- D. 所有能被 3 整除的数的数量和所有能被 5 整除的数的数量“一样多”

【考查内容】材料型阅读

【答案】C

【解析】所有正有限小数有无穷多个，因此 C 错误。

14. 判断正确的一项为_____。

- A. 0 和 1 之间所有小数的数量比所有正整数的数量更“多”，而 0.1, 0.2 之间所有小数的数量跟 0 和 1 之间所有小数的数量“一样多”，所以 0.1, 0.2 之间所有小数的数量比所有正整数的数量更“多”
- B. 真分数都可以表示成 $\frac{a}{b}$ ($b > a$, a, b 为正整数) 的形式，很显然， $\frac{a}{b}$ 可以和 $1\frac{a}{b}$ (一又 b 分之 a) 建立一一对应关系，而还有 $2\frac{a}{b}, 3\frac{a}{b}, 4\frac{a}{b}, \dots$ ，所以所有带分数的数量比所有真分数的数量更“多”，并且多很多倍
- C. 所有正无限循环小数都能转化成分数，但并不是所有正分数都能转化成无限循环小数，所以所有正分数的数量比所有正无限循环小数的数量更“多”
- D. 所有正有限小数都能转化成分数，但并不是所有正分数都能转化成有限小数，所以所有正分数的数量比所有正有限小数的数量更“多”

【考查内容】材料型阅读

【答案】A

【解析】排除法，易得 BCD 错误。

15. 判断正确的一项为_____。

- A. 无穷大就是指比所有的正数都要大，因此所有的无穷大都相等，不需要比较大小
- B. 如果两个无穷数所代表的对象集合中的对象能够一一对应，那么代表这

两个集合的无穷数就是“一样多”的；如果一个无穷数所代表的对象集合中的对象跟另一个无穷数所代表的集合中的对象的一部分一一对应，因为“整体大于部分”，我们就说第二个无穷数比第一个无穷数更“多”

- C. 并不是所有的无穷数都“一样多”，不过能找到最大的无穷数跟所有正整数的数量是“一样多”的
- D. 所有正小数的数量比所有正整数的数量与所有正分数的数量的乘积的数量要“更多”

【考查内容】材料型阅读

【答案】D

【解析】排除法，易得 ABC 错误.

16. 已知 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $C + D =$ _____.

- A. $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

【考查内容】材料型阅读

【答案】B

【解析】两个同型矩阵可以相加，且 $A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

17. 已知 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, 则 $C + 2D =$ _____.

- A. $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 20 & 17 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 11 & 15 \\ 21 & 17 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

【考查内容】材料型阅读

【答案】A

【解析】 $C + 2D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 6 \\ 2 \times 8 & 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 16 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 20 & 17 \end{pmatrix}$.

18. 已知 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $CD =$ _____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

【考查内容】材料型阅读

【答案】C

【解析】 $CD = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 3 \\ 0 \times 1 + 3 \times 2 & 0 \times 0 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

19. 已知 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $DC =$ _____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

【考查内容】材料型阅读

【答案】B

【解析】 $CD = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 0 \times 3 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 & 2 \times 2 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

20. 判断错误的选项为_____.

- A. 矩阵的加法满足交换律
- B. 矩阵的加法满足结合律
- C. 矩阵的乘法满足交换律但不满足结合律
- D. 矩阵的乘法满足结合律但不满足交换律

【考查内容】材料型阅读

【答案】C

【解析】由 18 和 19 可得, 矩阵的乘法不满足交换律.