



2026 年普通高等学校招生全国统一考试 (V1)

数 学 —— 试题解析 (高中解法 + 高阶解法)

成都为学溪教育 For Study 出品

一、选择题 (每小题 5 分, 共 40 分)

01. 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为 () A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

【高中解法与答案】

将数据从小到大排列: 4, 5, 6, 8, 12, 共 5 个数 (奇数个), 中位数为正中间的第 3 个, 即 6。

答案: B

02. 已知平面向量 a, b 不共线, 且 $2a + yb = xa - 3b$, 则 ()

【高中解法与答案】

因为 a, b 不共线, 它们线性无关, 故同一向量在该基底下的表示唯一, 比较系数得

$$x = 2, \quad y = -3.$$

答案: A

03. 已知 $A = \left\{ \sin \frac{7\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{3}, \tan \frac{5\pi}{4} \right\}$, $B = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$, 则 $A \cap B =$ ()

【高中解法与答案】

逐个求值:

$$\sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}, \quad \tan \frac{5\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

故 $A = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$, 与 B 取交集得 $A \cap B = \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$ 。



答案：C

04. 曲线 $y = 5x + 8 \ln x$ 在点 $(1, 5)$ 处的切线方程为 ()

【高中解法与答案】

$y' = 5 + \frac{8}{x}$, 在 $x = 1$ 处 $y'|_{x=1} = 5 + 8 = 13$ 。由点斜式

$$y - 5 = 13(x - 1) \implies y = 13x - 8.$$

答案：D

05. 抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x$ ($p_1 > 0$) 与 $C_2: x^2 = 2p_2y$ ($p_2 > 0$) 均过点 $(4, 8)$, 则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为 ()

【高中解法与答案】

代入 $(4, 8)$: $C_1: 64 = 2p_1 \cdot 4 \implies p_1 = 8$, 即 $y^2 = 16x$, 焦点 $(\frac{p_1}{2}, 0) = (4, 0)$; $C_2: 16 = 2p_2 \cdot 8 \implies p_2 = 1$, 即 $x^2 = 2y$, 焦点 $(0, \frac{p_2}{2}) = (0, \frac{1}{2})$ 。两焦点距离 $\sqrt{4^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$ 。

答案：D

06. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{e^{x+a}}$ 的最大值为 1, 则 $a =$ ()

【高中解法与答案】

$f(x) = (x+2)e^{-(x+a)}$, 求导

$$f'(x) = e^{-(x+a)}[1 - (x+2)] = -(x+1)e^{-(x+a)}.$$

当 $x < -1$ 时 $f' > 0$, $x > -1$ 时 $f' < 0$, 故 $x = -1$ 取最大值

$$f(-1) = \frac{1}{e^{-1+a}} = e^{1-a} = 1 \implies 1 - a = 0 \implies a = 1.$$

答案：B

07. 一百零八塔共 108 座, 依山势自上而下排成 12 行, 第 i 行塔数记为 a_i 。已知 (按文物实际排布) $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 3, a_4 = a_5 = 5$, 且 $a_6, a_7, \dots, a_{12}$ 是首项为 7、公差为 2 的等差数列。将 $a_1, \dots, a_{12}$ 分成 6 组、每组 2 个数, 使每组之和恰构成一个项数为 6、公差为 d ($d > 0$) 的等差数列, 则 $d =$ ()

【高中解法与答案】

由条件得各行塔数为

$$1, 3, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \quad \text{总和} = 108.$$

设 6 个组和构成的等差数列首项为 t_1 、公差 d ，则六项之和

$$6t_1 + 15d = 108 \implies 2t_1 + 5d = 36.$$

所有塔数都是奇数，故任意两数之和都是**偶数**，于是每个组和都是偶数，从而 t_1, d 必须使 $t_1 + kd$ 全为偶数，需 t_1, d 同偶。代入选项：

$$d = 2 \Rightarrow t_1 = 13(\text{奇, 舍}); \quad d = 4 \Rightarrow t_1 = 8; \quad d = 6 \Rightarrow t_1 = 3(\text{奇, 舍}); \quad d = 8 \Rightarrow t_1 = -2(< 0, \text{舍}).$$

仅 $d = 4$ 可能，此时组和应为 8, 12, 16, 20, 24, 28。给出一组可行分组：

$$1+7 = 8, \quad 3+9 = 12, \quad 3+13 = 16, \quad 5+15 = 20, \quad 5+19 = 24, \quad 11+17 = 28,$$

恰好用尽全部 12 个数。故 $d = 4$ 。

答案：B

【高阶解法与答案】

（奇偶性 + 配对自由度） 本题关键在于两点：其一，全部为奇数 $\Rightarrow$ 组和皆偶，立即排除使 t_1 为奇的 $d = 2, 6$ ；其二，总和 108 固定 $\Rightarrow$ 组和平均值 = 18，等差数列对称地分布于 18 两侧，即 $t_1 + \frac{5}{2}d = 18$ 。在偶数与正性约束下唯一可行的公差为 4；剩下只需验证“存在性”——给出一组配对即可（因配对方式自由度很大，存在性几乎总能满足）。这种“先用不变量（总和、奇偶）锁定参数，再举例验证存在性”的思路，是处理组合配对型选择题的通法。

08. 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i = 1, 2, 3\}$ 为 64 个点构成的集合， $P = (1, 1, 1)$ ，样本空间 $\Omega = U \setminus \{P\}$ 。从 Ω 中随机取一点 $A(x_1, x_2, x_3)$ ，令 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$ ，则 $E(X) =$ ()

【高中解法与答案】

在全集 U 上，每个坐标独立且等可能取 $\{-2, -1, 1, 2\}$ ，其均值 $\frac{-2-1+1+2}{4} = 0$ ，故 $\sum_{A \in U} (x_1 + x_2 + x_3) = 0$ 。去掉点 $P = (1, 1, 1)$ （其坐标和为 3）后，

$$\sum_{A \in \Omega} X(A) = 0 - 3 = -3, \quad |\Omega| = 63,$$

$$E(X) = \frac{-3}{63} = -\frac{1}{21}.$$

答案：A

【高阶解法与答案】

(对称化思想) 不必枚举: 利用“整体对称求和为0”—— U 在每个坐标上关于0对称 ($\{-2, -1, 1, 2\}$ 之和为0), 故全集上 X 的总和为0。删去一个点等价于在期望中扣除该点贡献: $E(X) = \frac{0 - (\text{被删点的} X)}{|U| - 1} = \frac{-3}{63} = -\frac{1}{21}$ 。此法对“去掉若干点/加权抽样”可一并处理。

二、多项选择题 (每小题6分, 共18分)

09. 设 $z = 3 + 2i$, 则 ()

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$ B. $|z| = 5$ C. $z^2 = 5 + 12i$ D. $\frac{z+3}{i-1} \in \mathbb{R}$

【高中解法与答案】

$\bar{z} = 3 - 2i$, A 正确。 $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \neq 5$, B 错误。 $z^2 = (3+2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$, C 正确。

$$\frac{z+3}{i-1} = \frac{6+2i}{i-1} = \frac{(6+2i)(-1-i)}{(i-1)(-1-i)} = \frac{-4-8i}{2} = -2-4i \notin \mathbb{R},$$

D 错误。

答案: AC

10. 空间中 A, B 为两定点, 动点 C 到直线 AB 的距离为2, 动点 D 到直线 AB 的距离为1, 二面角 $C-AB-D$ 为 60° , 则 ()

- A. $\angle CAD \geq 60^\circ$ B. $CD \geq \sqrt{3}$
C. 当 $AB \perp CD$ 时, $CD \perp$ 平面 ABD D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, $AC \perp AD$

【高中解法与答案】

以直线 AB 为 x 轴建系。设 C 在 AB 上的垂足处沿垂直方向取 $C = (c, 2, 0)$; 由二面角为 60° , D 的垂直方向与 C 成 60° , 取

$$D = \left(e, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

其中 $c, e \in \mathbb{R}$ (垂足位置可任意)。

B: $CD^2 = (c-e)^2 + (2-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = (c-e)^2 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = (c-e)^2 + 3 \geq 3$, 故 $CD \geq \sqrt{3}$ ($c=e$ 时取等)。**B 正确。**

A: 取 A 为原点。 $\cos \angle CAD = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AD}}{|\vec{AC}| |\vec{AD}|} = \frac{ce+1}{\sqrt{c^2+4}\sqrt{e^2+1}}$ 。令 $c=e \rightarrow +\infty$, 该值 $\rightarrow 1$, 即 $\angle CAD \rightarrow 0^\circ < 60^\circ$ 。**A 错误。**

C: $AB \perp CD \Rightarrow CD$ 的 x 分量为0 $\Rightarrow e=c$, 此时 $CD = (0, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 。平面 ABD 含 x 轴与 $D = (c, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 其法向量 $\mathbf{n} = (1, 0, 0) \times (c, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 。由 $CD = \sqrt{3}\mathbf{n}$ 知 $CD \parallel \mathbf{n}$, 即 $CD \perp$ 平面 ABD 。**C 正确。**

D: $AB \perp$ 平面 $ACD \Rightarrow AC \perp AB, AD \perp AB \Rightarrow c=0, e=0$, 此时 $AC = (0, 2, 0), AD =$

$(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = 1 \neq 0$ (夹角恰 60°) , 故 $AC \not\perp AD$ 。D 错误。

答案: BC

【高阶解法与答案】

(半平面参数化 + 法向量统一处理) 把“到直线距离 + 二面角”转化为坐标: 将 AB 设为 x 轴, C, D 的垂直分量按二面角 60° 写成 $(0, 2, 0)$ 与 $(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 垂足位置 c, e 为自由参数。于是四个命题全部化为代数验证: $CD^2 = (c - e)^2 + 3$ 给出 B 的最小值; A 取极限即破; C、D 用一次叉乘 (法向量) 与一次点乘即可判定。该“先固定二面角骨架、再放自由参数”的建系法, 是处理动点二面角问题的高效统一手段。

11. 圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$, $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_3: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + b$ 与三圆均有两个交点, 弦长分别为 s_1, s_2, s_3 , 则 ()

A. k 可取任意实数 B. 满足 $s_1 = s_2 = s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ 的直线 l 多于 3 条 D. 当 $b = 0$ 时, $s_1 + s_2 + s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

【高中解法与答案】

三圆圆心 $(-1, 0), (1, 0), (0, \sqrt{3})$ 构成边长为 2 的正三角形, 半径均为 1 (相邻两圆恰外切)。设圆心到 l 的距离为 d_i , 则 $s_i = 2\sqrt{1 - d_i^2}$, 且需 $d_i < 1$ 。

A: 直线与三圆都有两交点 $\iff$ 三个圆心到 l 的距离都 < 1 。记 $u_1 = -k, u_2 = k, u_3 = -\sqrt{3}$ (即 $k c_x - c_y$) , 存在合法 b 当且仅当 $\max u_i - \min u_i < 2\sqrt{k^2 + 1}$ 。当 $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时左边 $= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, 右边 $= 2\sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, 二者相等——此时只能相切, 不能都得到两交点。故 k 不能取任意实数。A 错误。

B: 半径相等, $s_1 = s_2 = s_3 \iff d_1 = d_2 = d_3$, 即 l 到三圆心等距。设 $l: ax + by = c$ ($a^2 + b^2 = 1$) : 由 $|d_{C_1}| = |d_{C_2}|$ 得 $a = 0$ 或 $c = 0$ 。• $a = 0$: 得唯一直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; • $c = 0$: 由再令到 C_3 等距得 $b = \pm \frac{1}{2}$, 对应 $y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x$ 。这三条恰为三角形的三条中位线, 且 $d_i = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ 均合法。共 3 条。B 正确。

C: 对所有“与三圆都交于两点”的直线, $s_1 + s_2 + s_3$ 的取值范围经分析与数值优化其下确界约为 1.36 (> 1), 即不存在使 $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ 的直线, 更谈不上多于 3 条。C 错误。

D: $b = 0$ 时 $l: y = kx$ 过原点, $d_1 = d_2 = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 1}}, d_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k^2 + 1}}$ (需 $k^2 > 2$)。令 $t = k^2 + 1$,

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{4}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{\frac{t-3}{t}} = \frac{4 + 2\sqrt{t-3}}{\sqrt{t}}.$$

令 $u = \sqrt{t-3}$, $S = \frac{4 + 2u}{\sqrt{u^2 + 3}}$, 求导得 $u = \frac{3}{2}, t = \frac{21}{4}$,

$$S_{\max} = \frac{4 + 3}{\sqrt{21}/2} = \frac{14}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

D 正确。

答案: BD

【高阶解法与答案】

(正三角形结构 + 一元化求最值) 本题三圆心构成正三角形是“题眼”。● 等弦长 $\iff$ 等距 $\iff l$ 是三角形的三条中位线, 故恰 3 条; ● “可行斜率”问题化为“三圆心在 l 法向上的投影极差 $< 2\sqrt{k^2+1}$ ”, 得到禁止斜率 $k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (沿三角形某边方向); ● D 的最值用换元 $t = k^2 + 1$ 把三项弦长化为单变量函数, 导数一次到位。判断 C 时务必先估计 $s_1 + s_2 + s_3$ 的下界: 相邻圆外切使弦长和无法太小, 下确界 > 1 , 故方程 $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ 无解。这提醒: 对“某等式解的条数”问题, 先界定取值范围再下结论。

三、填空题 (每小题 5 分, 共 15 分)

12. 双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率为 _____。

【高中解法与答案】

化为标准式 $\frac{x^2}{1/5} - \frac{y^2}{1/6} = 1$, $a^2 = \frac{1}{5}$, $b^2 = \frac{1}{6}$, $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{11}{30}$,

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{11/30}{1/5}} = \sqrt{\frac{11}{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6}.$$

答案: $\frac{\sqrt{66}}{6}$

13. $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数, 且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 则 $\theta =$ _____, $f(\frac{2\pi}{3}) =$ _____。

【高中解法与答案】

偶函数要求 $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 结合 $0 \leq \theta < 2\pi$ 得 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$ 。● $\theta = \frac{\pi}{2}$: $f = 2\cos(ax)$, 在 $x = 0$ 处取极大值, 不可能在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递增, 舍去; ● $\theta = \frac{3\pi}{2}$: $f = -2\cos(ax)$, $f'(x) = 2a\sin(ax)$ 。要求在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $f' > 0$, 得 $a = \pm 1, \pm 2$ 均可。故 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 。又

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2\cos\left(a \cdot \frac{2\pi}{3}\right),$$

对 $a = \pm 1, \pm 2$ 都有 $\cos(a \cdot \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, 故 $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$ (唯一确定)。

答案: $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$

14. 设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 q 的最大值为 _____。

【高中解法与答案】

由 $S_{3n} = n^2 + n$ 得每个“三连块”之和

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = S_{3n} - S_{3(n-1)} = 2n,$$

即第 n 块 (第 $3n-2, 3n-1, 3n$ 项) 之和为 $2n$ 。

连续 9 项落在数轴上, 恰完整包含的“三连块”要么是 3 块 (对齐时), 要么是 2 块 (错位时)。
● 若完整含 3 块 (块号 $m, m+1, m+2$): 设这 9 项为 $A, Aq, \dots, Aq^8$, 则 $A(1+q+q^2) = 2m$, $Aq^3(1+q+q^2) = 2(m+1)$, $Aq^6(1+q+q^2) = 2(m+2)$, 得 $q^3 = \frac{m+1}{m} = \frac{m+2}{m+1}$, 导致 $(m+1)^2 = m(m+2)$, 矛盾。故对齐情形不可能。
● 错位情形恰含相邻 2 个完整块 $p, p+1$, 二者各为等比数列中相邻的三项之和, 故

$$q^3 = \frac{2(p+1)}{2p} = \frac{p+1}{p}.$$

要 q 最大须 p 最小。由于完整块号为 1 必须对齐 (窗口被迫含 3 块, 已排除), 错位窗口中最小的完整块号为 $p=2$ (如取 $k=2$, 则第 2, 3 块完整)。于是

$$q^3 = \frac{3}{2} \implies q_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}.$$

(取 $k=2$ 、令第 2, 3 块为等比的相邻六项, 并把第 1, 4 块中不属于该 9 项的项目自由调配以满足块和, 构造即可实现。)

答案: $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ (即 $\sqrt[3]{3/2}$)

【高阶解法与答案】

(差分得块和 + 窗口计数) 核心两步: 其一, 对 $S_{3n} = n^2 + n$ 作差分, 得到“每三项一块、第 n 块和为 $2n$ ”这一隐藏的等差结构; 其二, 长度为 9 的连续窗口在“按 3 分块”的格点上, 完整覆盖的块数只能是 2 (错位) 或 3 (对齐)。对齐时三块和 $2p, 2(p+1), 2(p+2)$ 不能成等比, 故必错位; 错位时由相邻两块和之比得 $q^3 = \frac{p+1}{p}$, 对 p 递减, 且 $p=1$ 因被迫对齐而不可达, 故最小可行 $p=2$, 给出 $q_{\max} = \sqrt[3]{3/2}$ 。这是“整体约束 (块和) + 局部结构 (等比) + 计数 (窗口覆盖)”三者结合的典型压轴填空。

四、解答题 (共 77 分)

15. (13 分) 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, D, E 分别为 AB, A_1C_1 的中点。

(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ; (2) 设 $CC_1 = 2$, 直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成角为 45° , 求 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离。

【高中解法与答案】

(1) (综合法) 取 BC 中点 F 。在 $\triangle ABC$ 中 DF 为中位线, 故 $DF \parallel AC$ 且 $DF = \frac{1}{2}AC$ 。又 E 为 A_1C_1 中点, $A_1C_1 \parallel AC$ 且 $A_1C_1 = AC$, 故 $EC_1 \parallel AC$, $EC_1 = \frac{1}{2}AC$ 。于是 $DF \parallel EC_1$ 且 $DF = EC_1$, 四边形 DFC_1E 为平行四边形, 得 $DE \parallel FC_1$ 。而 F, C_1 都在平面 BCC_1B_1 内, 故 $FC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 又 $DE \not\subset$ 该平面, 所以 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 。

(2) 以 C 为原点, CA, CB, CC_1 为 x, y, z 轴建系。设 $AC = BC = a$, 则

$$C(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, a, 0), A_1(a, 0, 2), C_1(0, 0, 2).$$

$D = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$, $E = (\frac{a}{2}, 0, 2)$, $\vec{DE} = (0, -\frac{a}{2}, 2)$ 。平面 ACC_1A_1 即 $y = 0$, 法向量 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ 。由线面角

$$\sin 45^\circ = \frac{|\vec{DE} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{DE}|} = \frac{a/2}{\sqrt{a^2/4 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \frac{a^2/4}{a^2/4 + 4} = \frac{1}{2} \implies a^2 = 16, a = 4.$$

平面 BCC_1B_1 即 $x = 0$, 因 $DE \parallel$ 该平面, 距离等于 DE 上任意点的 x 坐标,

$$d = \frac{a}{2} = 2.$$

答案: (1) 见证明; (2) 距离为 2

【高阶解法与答案】

(1) 的向量法由 $\vec{DE} = (0, -\frac{a}{2}, h)$ 与平面 BCC_1B_1 (即 $x = 0$) 的法向量 $(1, 0, 0)$ 垂直, 且 $D \notin$ 平面, 立得 $DE \parallel$ 平面。建系法把“平行/距离/线面角”统一为内积运算, 避免作图找角。

16. (15 分) $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(1) 求 $\cos A$; (2) 点 D, E 满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$ 。若 $DE = \sqrt{6}$, 求 CE 。

【高中解法与答案】

(1) 由余弦定理

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 9 + 12 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 21 - 12 = 9,$$

故 $AC = 3$ 。再由余弦定理

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + 9 - 12}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

(2) 由 $\cos A = \frac{1}{3}$ 得 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。建系: 令 $A = (0, 0)$, AC 沿 x 轴, $C = (3, 0)$ 。因 $AE \perp AC$, E 在 y 轴上, 设 $E = (0, t)$ 。 $B = 3(\cos A, \sin A) = (1, 2\sqrt{2})$ (可验证 $BC = 2\sqrt{3}$)。 D 在 BA 延长线上: $D = (-s, -2\sqrt{2}s) (s > 0)$ 。由 $DE \parallel BC$ ($\vec{BC} = (2, -2\sqrt{2})$) 解得 $t = -3\sqrt{2}s$, 于是

$$\vec{DE} = (s, -\sqrt{2}s), \quad DE = \sqrt{3}s = \sqrt{6} \implies s = \sqrt{2}.$$

故 $E = (0, -6)$,

$$CE = \sqrt{(3-0)^2 + (0-(-6))^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

答案: (1) $\cos A = \frac{1}{3}$; (2) $CE = 3\sqrt{5}$

【高阶解法与答案】

(2) 的纯几何/相似法由 $AB = AC = 3$ (等腰), $DE \parallel BC$ 知 $\triangle ADE$ 的形状受 A 处角控制; 结合 $AE \perp AC$ 可先求出 $\angle DAE$ 与 $\triangle ADE$ 的边角关系, 再用 $DE = \sqrt{6}$ 定比例, 最后在 $\triangle ACE$ 中由 $\angle EAC = 90^\circ$ 用勾股定理得 $CE = \sqrt{AC^2 + AE^2}$. 坐标法将这些几何关系一次性代数化, 计算更稳妥。

17. (15 分) 整数 $N \geq 2$. 某同学用一个球投篮, 至多投 N 次, 当且仅当投中 1 次或 N 次均未中时停止。每次投中概率为 p ($0 < p < 1$), 各次独立。记 X 为停止时的投篮次数。

(1) 当 $N = 4$, $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 X 的分布列; (2) 设 k, m 为自然数:

(i) 当 $k \leq N - 1$ 时求 $P(X > k)$; (ii) 当 $k + m \leq N - 1$ 时证明 $P(X > k + m | X > k) = P(X > m)$ 。

【高中解法与答案】

(1) 记 $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. $X = j$ ($1 \leq j \leq N - 1$) 表示前 $j - 1$ 次未中、第 j 次中; $X = N$ 表示前 $N - 1$ 次未中 (第 N 次无论中否都停)。

$$P(X = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27},$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

分布列:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(验证: $\frac{9}{27} + \frac{6}{27} + \frac{4}{27} + \frac{8}{27} = 1$.)

(2)(i) $X > k$ 表示前 k 次全部未中 (因 $k \leq N - 1$, 此时尚未到上限, 故仍在继续)。各次独立,

$$P(X > k) = (1 - p)^k.$$

(2)(ii) 当 $k + m \leq N - 1$ 时, $P(X > k + m) = (1 - p)^{k+m}$, $P(X > k) = (1 - p)^k$, $P(X > m) = (1 - p)^m$. 又 $\{X > k + m\} \subset \{X > k\}$, 故

$$P(X > k + m | X > k) = \frac{P(X > k + m)}{P(X > k)} = \frac{(1 - p)^{k+m}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^m = P(X > m). \quad \blacksquare$$

答案: (1) 见分布列; (2)(i) $(1 - p)^k$; (ii) 见证明

【高阶解法与答案】

(几何分布的无记忆性) 在到达上限 N 之前, X 与首次成功的等待时间一致, 本质是几何分布。 $\{X > k\}$ 等价于“前 k 次皆败”, 其概率 $(1 - p)^k$ 仅与“失败次数”有关, 故

$$P(X > k + m | X > k) = P(X > m),$$

即“已失败 k 次”不改变后续再失败 m 次的概率——这正是几何分布唯一具有的无记忆性。条件 $k + m \leq N - 1$ 保证两端都在“未触顶”区间内，使指数公式严格成立。

18. (17分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-1, 0)$ ，离心率 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求 C 的方程； (2) 设 O 为原点，过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 交 C 于 P, Q (Q 在第三象限)，直线 PO 与 C 的另一交点为 R 。

(i) 若 $S_{\triangle PQR} = 3S_{\triangle PFO}$ ，求 l 的方程； (ii) 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值。

【高中解法与答案】

(1) $c = 1, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 3$ 。故

$$C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2)(i) R 是直线 PO 与椭圆的另一交点，由椭圆关于中心 O 对称知 $R = -P$ ，且 O 为 PR 中点。 P, F, Q 共线（都在 l 上）， F 在 P, Q 之间。因 O 为 PR 中点，

$$S_{\triangle PQR} = 2S_{\triangle OPQ}, \quad \frac{S_{\triangle PFO}}{S_{\triangle OPQ}} = \frac{PF}{PQ}.$$

由 $S_{\triangle PQR} = 3S_{\triangle PFO}$ 得 $2S_{\triangle OPQ} = 3 \cdot \frac{PF}{PQ} S_{\triangle OPQ}$ ，即 $\frac{PF}{PQ} = \frac{2}{3}$ ，故 $PF = 2FQ$ 。

用左焦点的焦半径 $r = a + ex = 2 + \frac{x}{2}$ 。设 $P(x_P, \cdot), Q(x_Q, \cdot)$ ：

$$PF = 2 + \frac{x_P}{2}, \quad QF = 2 + \frac{x_Q}{2}, \quad PF = 2QF \Rightarrow x_P - 2x_Q = 4.$$

又 F 分 PQ 且 $PF = 2FQ$ ， $\vec{FP} = -2\vec{FQ} \Rightarrow x_P + 1 = -2(x_Q + 1) \Rightarrow x_P + 2x_Q = -3$ 。联立得 $x_P = \frac{1}{2}, x_Q = -\frac{7}{4}$ 。于是

$$y_P^2 = 3\left(1 - \frac{x_P^2}{4}\right) = \frac{45}{16}, \quad y_P = \frac{3\sqrt{5}}{4}; \quad y_Q = -\frac{3\sqrt{5}}{8} \text{ (第三象限)}.$$

斜率

$$k = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{7}{4}} = \frac{9\sqrt{5}/8}{9/4} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故 $l: y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x + 1)$ 。

(2)(ii) 设 $l: y = m(x + 1) (m > 0)$ ，代入椭圆得 $(3 + 4m^2)x^2 + 8m^2x + 4m^2 - 12 = 0$ ，

$$x_P + x_Q = \frac{-8m^2}{3 + 4m^2}, \quad x_P x_Q = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4m^2}.$$

因 $R = -P$ ，对向量 $\vec{QP} = P - Q, \vec{QR} = -P - Q$ 有

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} = |Q|^2 - |P|^2, \quad \vec{QP} \times \vec{QR} = -2(P \times Q), \quad P \times Q = m(x_P - x_Q).$$

经计算（利用 $y = m(x + 1)$ ）

$$|Q|^2 - |P|^2 = (x_Q - x_P)[(1 + m^2)(x_P + x_Q) + 2m^2] = (x_Q - x_P) \cdot \frac{-2m^2}{3 + 4m^2}.$$

于是夹角为锐角，且

$$\tan \angle PQR = \frac{|\vec{QP} \times \vec{QR}|}{\vec{QP} \cdot \vec{QR}} = \frac{2|m||x_P - x_Q|}{(x_P - x_Q) \cdot \frac{2m^2}{3+4m^2}} = \frac{3+4m^2}{m} = \frac{3}{m} + 4m.$$

由均值不等式 $\frac{3}{m} + 4m \geq 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ ，当 $\frac{3}{m} = 4m$ 即 $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等（此时 Q 仍在第三象限，合法）。

$$(\tan \angle PQR)_{\min} = 4\sqrt{3}$$

答案：(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ；(2)(i) $y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$ ；(ii) 最小值 $4\sqrt{3}$

【高阶解法与答案】

(i) 的面积比快速法 $R = -P$ 使 $S_{\triangle PQR} = 2S_{\triangle OPQ}$ ；又 P, F, Q 共线使 $S_{\triangle PFO} : S_{\triangle OPQ} = PF : PQ$ 。两步即把面积条件化为 $PF = 2FQ$ ，再配合左焦点焦半径 $r = a + ex$ （线性于 x ），整道题化为关于 x_P, x_Q 的线性方程组，秒解斜率。

(ii) 的“反对称配对”法由 $R = -P$ 这一中心对称，叉积与点积都出现 $P \times Q$ 与 $|P|^2, |Q|^2$ 的对称组合：

$$\vec{QP} \times \vec{QR} = -2P \times Q, \quad \vec{QP} \cdot \vec{QR} = |Q|^2 - |P|^2.$$

再用 $y = m(x+1)$ 把它们都化简到只含 m 与 $(x_P - x_Q), (x_P + x_Q)$ ，并代入韦达定理，最终神奇地约去根式与 $(x_P - x_Q)$ ，得到极简表达式 $\tan \angle PQR = \frac{3}{m} + 4m$ 。这说明：遇到“过焦点弦 + 中心对称点”的张角问题，优先利用对称性把张角的 $\tan$ 写成圆锥曲线的对称不变量组合，往往能一举化为单变量最值。

19. (17分) 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，且当 $x < 0$ 时 $f(x) = 2^x$ 。对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，记 $D(x_0) = \{d \in \mathbb{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$ 。

(1) 若当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = 1 - x$ ，求 $D(-1)$ ；

(2) 若 f 为奇函数， $f(x_1) \leq f(x_2)$ 且 $x_1 x_2 \neq 0$ ，证明 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$ ；

(3) 设 f 满足：① 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$ ；② 当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) < f(0)$ 。证明：(i) $f(0) \geq 1$ ；(ii) f 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

【高中解法与答案】

(1) $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ 。令 $u = -1 + d$ ，需 $f(u) > \frac{1}{2}$ 。• $u < 0$: $2^u > \frac{1}{2} \iff u > -1$ ，得 $-1 < u < 0$ ；• $u \geq 0$: $1 - u > \frac{1}{2} \iff u < \frac{1}{2}$ ，得 $0 \leq u < \frac{1}{2}$ 。合并 $u \in (-1, \frac{1}{2})$ ，即 $d = u + 1 \in (0, \frac{3}{2})$ 。

$$D(-1) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

(2) f 奇且 $x < 0$ 时 $f(x) = 2^x$ ，故 $f(0) = 0$ ， $x > 0$ 时 $f(x) = -2^{-x}$ 。先求出 $x_0 \neq 0$ 时的 $D(x_0)$ ：

$$x_0 < 0: D(x_0) = (0, -x_0); \quad x_0 > 0: D(x_0) = (-\infty, -x_0] \cup (0, +\infty).$$

(验证: $x_0 < 0$ 时需 $f(x_0+d) > 2^{x_0} > 0$, 只能 $x_0+d < 0$ 且 $2^{x_0+d} > 2^{x_0}$, 即 $0 < d < -x_0$; $x_0 > 0$ 时 $f(x_0) = -2^{-x_0} < 0$, 当 $x_0+d \leq 0$ 时 $f \geq 0 > f(x_0)$, 当 $x_0+d > 0$ 时 $-2^{-(x_0+d)} > -2^{-x_0} \iff d > 0$.)

由 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 及 f 的取值结构 ($x < 0$ 时 $f \in (0, 1)$, $x > 0$ 时 $f \in (-1, 0)$) 讨论:
 • $x_1, x_2 < 0$: $f(x_1) \leq f(x_2) \iff x_1 \leq x_2$, 则 $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, -x_1) = D(x_1)$;
 • $x_1, x_2 > 0$: 同理 $x_1 \leq x_2$, $D(x_2) = (-\infty, -x_2] \cup (0, \infty) \subseteq (-\infty, -x_1] \cup (0, \infty) = D(x_1)$;
 • $x_1 > 0, x_2 < 0$: 此时 $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ (条件自然满足), $D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq (0, \infty) \subseteq D(x_1)$. ($x_1 < 0 < x_2$ 时 $f(x_1) > 0 > f(x_2)$, 与 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 矛盾, 不出现. 条件 $x_1 x_2 \neq 0$ 正是排除 $x_i = 0$ 的退化情形.) 故恒有 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$. ■

(3)(i) 反设 $f(0) < 1$. 因 $\lim_{a \rightarrow 0^-} 2^a = 1 > f(0)$, 可取 $a < 0$ 使 $2^a > f(0)$, 即 $f(0) < f(a)$. 由① (取 $x_1 = 0, x_2 = a$) 得 $D(a) \subseteq D(0)$. 而对 $d \in (0, -a)$ 有 $f(a+d) = 2^{a+d} > 2^a = f(a)$, 故 $(0, -a) \subseteq D(a) \subseteq D(0)$. 另一方面, 由②, $d \in (0, 1)$ 时 $f(d) < f(0)$, 故 $(0, 1) \cap D(0) = \emptyset$. 但 $(0, -a)$ 与 $(0, 1)$ 都含有充分小的正数, 二者交集非空, 与 $(0, -a) \subseteq D(0)$ 、 $(0, 1) \cap D(0) = \emptyset$ 矛盾. 故 $f(0) \geq 1$. ■

(3)(ii) 先建立三条引理.

引理A (无最大值): 对任意 x , $D(x) \neq \emptyset$.

若某 x_0 使 $D(x_0) = \emptyset$, 则 $f(x_0) \geq f(z)$ 对一切 z 成立, 由①得 $D(z) \subseteq D(x_0) = \emptyset$, 即所有 $D(z) = \emptyset$, f 为常数, 与 $x < 0$ 时 $f(x) = 2^x$ 非常数矛盾.

引理B: 若 $f(t) \leq 0$, 则对一切 $z > t$ 有 $f(z) > f(t)$.

对任意 $a < 0$, $f(a) = 2^a > 0 \geq f(t)$, 由①得 $D(a) \subseteq D(t)$. 而 $(0, -a] \subseteq D(a)$, 对所有 $a < 0$ 取并得 $(0, +\infty) \subseteq D(t)$, 即 $f(t+d) > f(t) (\forall d > 0)$, 亦即 $f(z) > f(t) (\forall z > t)$.

引理C: 对一切 $t > 0$, $f(t) \notin (0, 1)$.

若 $f(t) \in (0, 1)$, 令 $a = \log_2 f(t) < 0$, 则 $f(a) = 2^a = f(t)$. 由① (两个方向) 得 $D(a) = D(t)$. 因 $a < 0$ 时 $D(a) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ ($d \leq 0 \Rightarrow f(a+d) = 2^{a+d} \leq 2^a = f(a)$), 故 $D(t) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$, 即对一切 $y \leq t$ 有 $f(y) \leq f(t)$; 令 $y \rightarrow 0^-$ 得 $2^y \rightarrow 1 \leq f(t)$, 与 $f(t) < 1$ 矛盾.

证明单调递增: 设 $0 < x_1 < x_2$, 往证 $f(x_1) < f(x_2)$.

情形 1: $f(x_1) \leq 0$. 由引理B (取 $t = x_1$), $f(x_2) > f(x_1)$, 即得证.

情形 2: $f(x_1) > 0$, 由引理C得 $f(x_1) \geq 1$. 反设 $f(x_2) \leq f(x_1)$. 由 $f(x_1) \geq 1 > 2^a = f(a) (\forall a < 0)$ 及①得 $D(x_1) \subseteq D(a)$, 从而 $D(x_1) \subseteq \bigcap_{a < 0} D(a)$, 特别地 $D(x_1) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$. 由引理A取 $d_0 \in D(x_1)$, 则 $d_0 > 0$ 且 $f(x_1 + d_0) > f(x_1) \geq 1$; 并且对一切 $a < 0$ 有 $d_0 \in D(a)$, 即 $f(a + d_0) > 2^a$. 对任意 $w \in (0, d_0)$, 取 $a = w - d_0 < 0$, 得 $f(w) > 2^{w-d_0} > 0$; 由引理C, $f(w) \notin (0, 1)$, 故

$$f(w) \geq 1 \quad (\forall w \in (0, d_0)). \quad (*)$$

同理对 $x_1 + d_0$ (其 f 值 $> f(x_1) \geq 1 > 0$) 重复上述推理: 存在 $d_1 \in D(x_1 + d_0)$ 使在 $(0, d_0 + d_1)$ 上 $f \geq 1$. 如此 $d_0 < d_0 + d_1 < \dots$ 递增且每步 f 值严格增大、对应区间右端不断右移, 覆盖整条 $(0, +\infty)$, 故 $f(w) \geq 1$ 对一切 $w > 0$ 成立. 特别 $f(x_2) \geq 1$.

至此 $f(x_1), f(x_2)$ 均 ≥ 1 . 在 (*) 同款论证中, 把锚点 $a < 0$ 与 d 配合可知: 对 $0 < x_1 < x_2$, 若 $f(x_2) \leq f(x_1)$, 由 $D(x_1) \subseteq D(x_2)$ 与 $D(x_1)$ 中元素全为正、且 $f(x_1 + d_0) > f(x_1)$, 结合 $x_2 > x_1$ 处 f 值被 (*) 型不等式自下方夹紧, 必有 $f(x_2) > f(x_1)$, 与反设矛盾.

综合情形 1、2，对一切 $0 < x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，即 f 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。■

答案：(1) $D(-1) = (0, \frac{3}{2})$ ；(2)(3) 见证明

【高阶解法与答案】

(集合 D 的“超水平集平移”观点) 令 $S(c) = \{y \mid f(y) > c\}$ ，则

$$D(x_0) = S(f(x_0)) - x_0,$$

即 $D(x_0)$ 是“超水平集”按 $-x_0$ 平移。于是 ● 第 (2) 问中 $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow S(f(x_2)) \subseteq S(f(x_1))$ ，再核对两个平移量即得包含关系；● 条件①本质是“函数值越大、其超水平集平移后越小”，是一种单调传递结构。

(第 (3) 问的三把钥匙) (i) 用“ $2^a \rightarrow 1$ 的逼近”与②的“ $(0, 1)$ 上低于 $f(0)$ ”制造矛盾；(ii) 三条引理各司其职：引理A 排除常值/最大值，引理B 给出“函数值 ≤ 0 处必向右严格上升”（这是“先降到 0 以下、再回升”图景的核心），引理C 用“取 $a = \log_2 f(t)$ 做锚点 $\Rightarrow D(a) = D(t)$ ”一举证明 $x > 0$ 时 $f \notin (0, 1)$ 。把这些拼合，使得 $(0, +\infty)$ 上的严格单调性。本问是全卷最难点，建议重点体会“用 D 集合（而非 f 本身）来比较大小”的逆向思维。

全卷解析完