

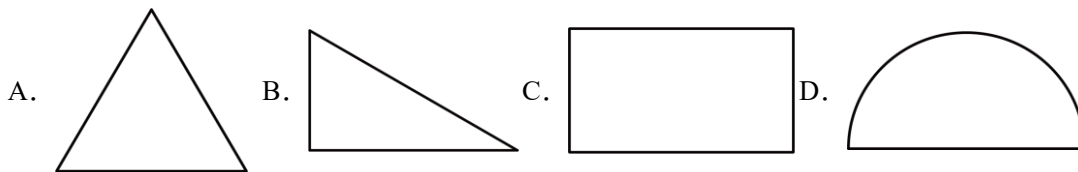
2026 北京中考真题

数 学

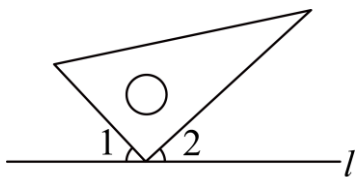
学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 下列图形中, 是中心对称图形的是 ()

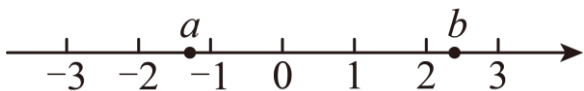


2. 如图, 三角尺的直角顶点在直线 l 上. 若 $\angle 1 = 48^\circ$, 则 $\angle 2$ 的大小为 ()



- A. 30° B. 42° C. 45° D. 48°

3. 实数 a , b 在数轴上的对应点的位置如图所示, 下列结论中正确的是 ()



- A. $a > b$ B. $-a > b$ C. $|a| = -a$ D. $ab > 0$

4. 一个不透明的袋子中仅有 5 个球, 其中有 1 个白球、1 个黄球, 其余都是红球, 这 5 个球除颜色外无其他差别. 从袋子中随机摸出一个球, 摸出的球是红球的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

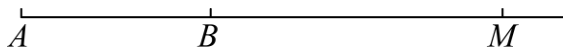
5. 方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$ 的解为 ()

- A. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

6. 再生水利用提升工程是北京市“十五五”时期美丽北京建设的重大工程之一. 北京市一家在建的再生水厂建成后每天能够供应 2×10^5 t 高品质再生水. 若一年按 365 天计. 则该再生水厂建成后, 一年能够供应的高品质再生水的总量用科学记数法表示应为 ()

- A. 0.73×10^8 t B. 7.3×10^7 t C. 7.3×10^{10} t D. 730×10^5 t

7. 如图, 点 B 在射线 AM 上, 在射线 BM 上截取 $BC = BA$, 分别以 A 、 B 为圆心, AB 长为半径画弧, 两弧相交于点 D . 连接 BD , CD , 则 $\angle BDC$ 的大小为 ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0)$ ， $B(1,t)(t>0)$ ．若点 C 不与点 A 重合，且以 B, O, C 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 全等，则称 C 为 B 的“友好点”．给出下面四个结论：

- ①对于所有的点 B ，在 y 轴上都有 B 的“友好点”；
 ②能够找到点 B ，使得在 x 轴上有 B 的“友好点”；
 ③对于所有的点 B ，在第一象限内都有 B 的“友好点”；
 ④能够找到点 B ，使得在第四象限内有 B 的“友好点”．

上述结论中，所有正确结论的序号是（ ）

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

二、填空题

9. 若代数式 $\frac{2}{x-2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____．

10. 分解因式： $x^3 - 49x =$ _____．

11. 在凸五边形 $ABCDE$ 中， $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$ ， $\angle D = \angle E$ ，则 $\angle D =$ _____°．

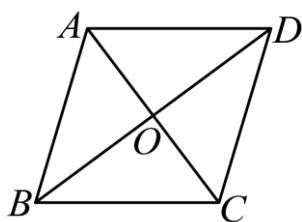
12. 某学校共有 2000 名学生．为了解这些学生放假期间每周体育活动时间（单位：h）的情况，从中随机抽取了 100 名学生进行调查，数据整理如下：

每周体育活动时间	$x < 8$	$8 \leq x < 10$	$10 \leq x < 12$	$12 \leq x < 14$	$x \geq 14$
学生人数	3	7	55	24	11

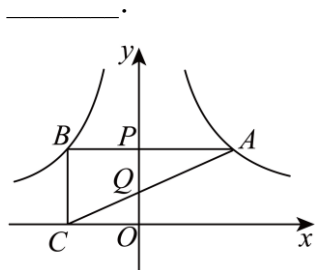
学校建议，每周体育活动时间小于 10 h 的学生应适当增加体育活动时间．根据以上信息，估计该学校 2000 名学生中应适当增加体育活动时间的学生人数是_____．

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = x^2 + 4x + 4$ 的图象经过点 (m, y_1) 和 $(m+1, y_2)$ ．若 $m > 0$ ，则 y_1 _____ y_2 （填“>”“=”或“<”）．

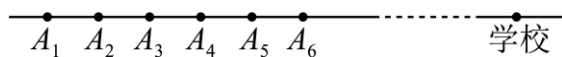
14. 如图， $\square ABCD$ 的两条对角线相交于点 O ．已知 $\square ABCD$ 的面积为 24， BD 的长为 8，当 AO 的长为_____时， $\square ABCD$ 是菱形．



15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，过 y 轴正半轴上的点 P 作 x 轴的平行线，分别交函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 和 $y = -\frac{3}{x} (x < 0)$ 的图象于点 A 、 B ，过点 B 作 x 轴的垂线，垂足为 C ，连接 AC 交 y 轴于点 Q ，则 $\frac{PQ}{QO}$ 的值为



16. 如图所示，公路旁自西向东依次有 $A_1, A_2, \dots, A_6$ 共 6 处住宅和一所学校。每个工作日早上，每处住宅各有 1 名学生需乘同一辆校车前往该学校，校车仅在于某住宅处的车站停车一次，每名学生需从自家住宅沿公路步行至该车站乘车，6 名学生都上车后，校车沿公路向东行驶至学校。



- 已知每名学生在相邻两处住宅间的步行时间均为 2.5 min，校车在相邻两处住宅间的行驶时间均为 1 min，校车从 A_6 处至学校的行驶时间为 20 min。一名学生的理想通勤时间是指该学生从自家住宅至车站的步行时间与校车从车站至学校的行驶时间之和（不考虑其他因素）。

- (1) 若车站设在 A_2 处，则住在 A_6 处的学生的理想通勤时间为 _____ min；
 (2) 若当车站设在 A_k 处时这 6 名学生的理想通勤时间之和最小，则 $k =$ _____。

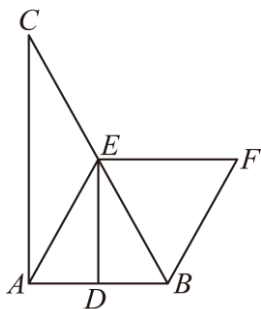
三、解答题

17. 计算： $|\sqrt{3}| - \sqrt{18} + (\pi - \sqrt{5})^0 + 6\sin 45^\circ$ 。

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 3(x+1) > x-3 \\ \frac{3x-4}{2} < x-1 \end{cases}$$
。

19. 已知 $x - 2y - 5 = 0$ ，求代数式 $\frac{2(x+y) - 6y}{x^2 - 4xy + 4y^2}$ 的值。

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， D, E 分别为 AB, BC 的中点， $BC = 2BF$ ， $AE \parallel BF$ 。



- (1) 求证：四边形 $ABFE$ 是平行四边形；

(2)若 $AB = 2$ ， $AC = 3$ ，求四边形 $DBFE$ 的面积.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $(-2, -1)$ 和 $(1, 5)$.

(1)求 k ， b 的值；

(2)当 $-2 < x < 1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的值小于函数 $y = kx + b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

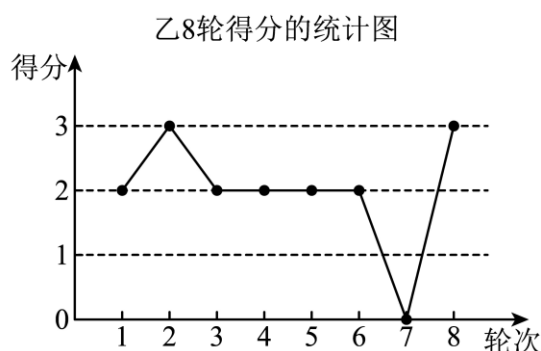
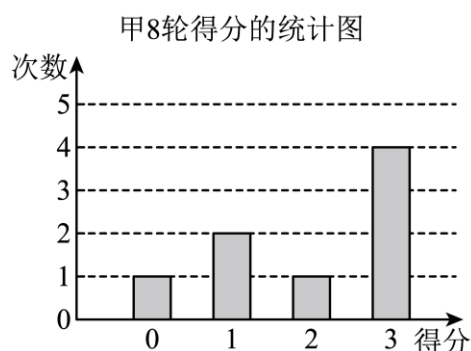
22. 在一次机器人跑步比赛中，自主导航机器人（以下称 A 类机器人）与遥控机器人（以下称 B 类机器人）在同一赛道比赛，统一排名. 为鼓励自主导航技术研发，主办方制定了以下计算完赛成绩的规则：

·A 类机器人的完赛成绩为从起点跑到终点的时间（包含途中维护时间）；

·B 类机器人的完赛成绩为从起点跑到终点的时间（包含途中维护时间）的 1.2 倍.

已知比赛中，一台 A 类机器人全程保持匀速，途中没有维护，完赛成绩为 60 min；一台 B 类机器人起跑后，前 25 min 保持匀速，速度是这台 A 类机器人的 1.1 倍，之后原地维护 10 min，维护后匀速跑至终点，速度比维护前增加了 70 m/min，完赛成绩为 72 min. 求这台 A 类机器人的速度和此次比赛从起点到终点的路程.

23. 若干名学生参加编程比赛，比赛共 8 轮，每轮有 3 道题，每人每轮的得分为该轮答对题目的数量（得分为整数）. 已知甲、乙两名学生 8 轮得分的情况如下：



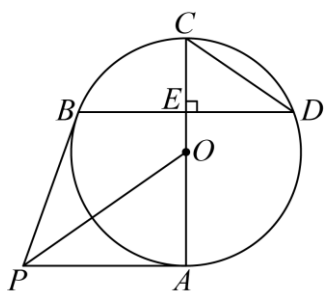
根据以上信息，回答下列问题：

(1)甲 8 轮得分的平均数为_____，乙 8 轮得分的平均数为_____；

(2)记甲、乙 8 轮得分的方差分别为 $s_{\text{甲}}^2$ 和 $s_{\text{乙}}^2$ ，则 $s_{\text{甲}}^2$ _____ $s_{\text{乙}}^2$ （填“>”“=”或“<”）；

(3)如果丙 8 轮得分的中位数为 2.5，那么丙 8 轮得分的平均数是不是一定大于乙 8 轮得分的平均数？若是，请说明理由；若不是，请举出反例.

24. 如图，过点 P 作 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A ， B ， AC 为 $\odot O$ 的直径，过点 B 作 AC 的垂线，垂足为 E ，交 $\odot O$ 于点 D ，连接 OP ， CD .

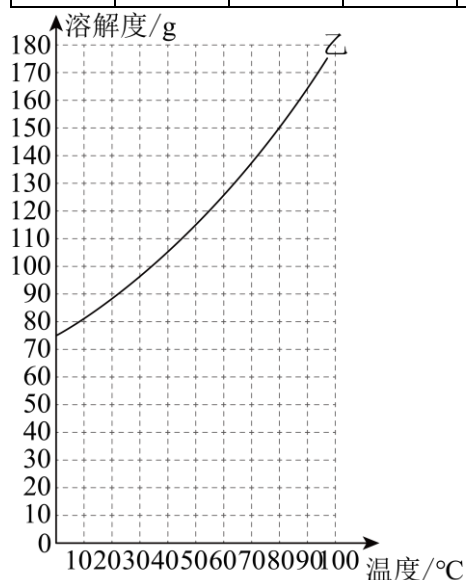


(1)求证： $\angle ACD = \angle POA$ ；

(2)连接 PC 交 BD 于点 F ，若 $CE = 2$ ， $\tan \angle ACD = \sqrt{2}$ ，求 BF 的长.

25. 在一定温度下，向一定量溶剂里加入某种溶质，当溶质不能继续溶解时，所得到的溶液叫作这种溶质的饱和溶液. 固体的溶解度表示在一定温度下，某固态物质在 100g 溶剂里达到饱和状态时所溶解的质量. 小云通过查阅资料，得到了溶剂为水时物质甲（硝酸钾）在不同温度下的溶解度数据和溶剂为水时物质乙（硝酸钠）的溶解度曲线，如下所示：

温度 °C	0	10	20	30	40	50	60	70	80
甲的 溶解 度 g	13.3	20.9	31.6	45.8	63.9	85.5	110	138	169



(1)根据表中数据，在图中画出 $0^{\circ}\text{C} \sim 80^{\circ}\text{C}$ 范围内甲的溶解度曲线；

(2)当温度为 _____ $^{\circ}\text{C}$ （精确到个位）时，甲和乙的溶解度相同，均为 $n\text{g}$. 在该温度下，将 $n\text{g}$ 乙加入 100g 水中，充分搅拌使其全部溶解后，将温度降至 10°C ，此时会有 _____ g （精确到个位）乙从水中析出；

(3)当温度为 10°C 时，小云将 100g 甲加入到装有 100g 水的1号杯中，将 100g 乙加入到装有 100g 水的2号杯中，充分搅拌后，发现两种物质均不能全部溶解．为使两种物质均能全部溶解，小云考虑了以下两种方案：

方案一：将温度提升至 $T^{\circ}\text{C}$ ，充分搅拌后使两种物质均能全部溶解；

方案二：保持温度不变，向1号杯中再加入 $m_1\text{g}$ 水，向2号杯中再加入 $m_2\text{g}$ 水，充分搅拌后使两种物质均能全部溶解．

①方案一中， T 的最小值为_____（精确到个位）；

②方案二中， $m_1 + m_2$ 的最小值为_____（精确到个位）．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $\left(0, \frac{1-a}{a}\right)$ ，对称轴为 $x = \frac{1}{a}$ ．

(1)求 b 的值，并用含 a 的式子表示 c ；

(2)已知 M 是抛物线 C_1 上的点， M 的横坐标为 t ，抛物线 C_2 的顶点为 M ，且可以由抛物线 C_1 平移得到（特别地，当 M 是 C_1 的顶点时， C_2 即为 C_1 ）．若无论 t 为何值，抛物线 C_2 都不经过点 O ，求 a 的取值范围．

27. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha (0^{\circ} < \alpha < 60^{\circ})$ ，过 AC 的中点 D 作 AC 的垂线 l ，交 AB 于点 E ，点 M 在 DE 的延长线上， $\angle ABM = 30^{\circ}$ ．

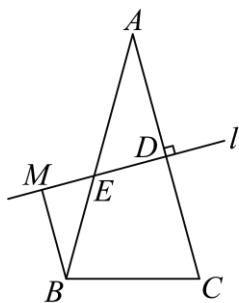


图1

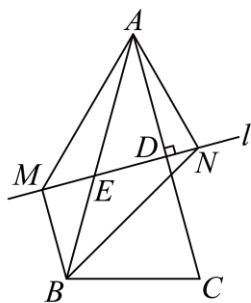


图2

(1)如图1， $\alpha = 30^{\circ}$ ，求证： $AB = 2DM$ ；

(2)如图2，点 N 在 ED 的延长线上， $\angle ABN = 30^{\circ}$ ，连接 AM ， AN ，直接写出 $\angle MAN$ 的大小，并证明．

28. 对于不共线的三点 A ， B ， C ，连接 AB ， AC ，并作劣弧 BC ，使得 BC 所在圆的圆心在过点 A 且与 BC 平行的直线上，称由 AB ， AC 和 BC 组成的图形为单弧三角形，记作 $\triangle A-BC$ ，其中 BC 所在圆的圆心称为 $\triangle A-BC$ 的弧心．

在平面直角坐标系 xOy 中，

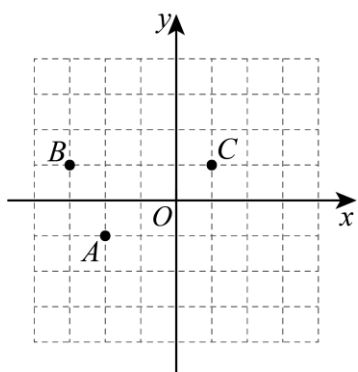


图1

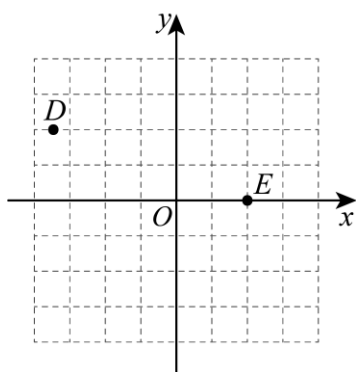


图2

(1)如图 1，点 $A(-2,-1)$ ， $B(-3,1)$ ， $C(1,1)$ ，直接写出 $\triangle A-BC$ 的弧心的坐标及 BC 的长；

(2)如图 2，点 $D(-2\sqrt{3},2)$ ， $E(2,0)$ ，当 $\triangle D-EF$ 的弧心为 O 时，求点 F 的坐标；

(3)已知点 $M(1,0)$ ，对于平面内的点 N ，存在点 P ， Q 满足 $\triangle P-MN$ 和 $\triangle Q-MN$ 的弧心均为 O ， $\triangle PMN$ 和 $\triangle QMN$ 都不是钝角三角形，且 $PQ=1$ ，记 N 的横坐标为 t ，直接写出 t 的取值范围．

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8		
答案	C	B	C	D	A	B	A	B		

1. C

【详解】解：A、不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B、不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C、是中心对称图形，故本选项符合题意；

D、不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

2. B

【详解】解： $\because$ 三角尺的直角顶点在直线 l 上，且直角等于 90° ，

$$\therefore \angle 1 + 90^\circ + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ.$$

3. C

【分析】根据数轴上点的位置确定 a ， b 的取值范围及正负性，结合绝对值的性质及有理数的大小比较法则进行判断.

【详解】解：由数轴可知， $-2 < a < -1$ ， $2 < b < 3$ ，

$$\therefore a < 0, b > 0,$$

$$\text{A: } \because a < 0, b > 0,$$

$$\therefore a < b,$$

$\therefore$ A 不符合题意；

$$\text{B: } \because -2 < a < -1,$$

$$\therefore 1 < -a < 2,$$

$$\text{又 } \because b > 2,$$

$$\therefore -a < b,$$

$\therefore$ B 不符合题意；

$$\text{C: } \because a < 0, \text{ 根据绝对值的性质可得 } |a| = -a,$$

$\therefore$ C 符合题意；

$$\text{D: } \because a < 0, b > 0,$$

$$\therefore ab < 0,$$

∴D 不符合题意.

4. D

【分析】先求出红球的个数，再用红球个数除以球的总个数，即可得到摸出红球的概率.

【详解】解：∵袋子中共有5个球，其中1个白球，1个黄球，

∴红球的个数为 $5-1-1=3$ ，

∴随机摸出一个球是红球的概率为 $\frac{3}{5}$.

5. A

【详解】解：
$$\begin{cases} x+y=4 \text{①} \\ 3x-2y=7 \text{②} \end{cases}$$

将①式两边同乘2得， $2x+2y=8$ ③，

②+③得， $5x=15$ ，

解得 $x=3$ ，

将 $x=3$ 代入①式得， $3+y=4$ ，

解得 $y=1$ ，

因此原方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

6. B

【详解】解：∵每天供应量为 $2 \times 10^5 \text{t}$ ，一年按365天计算

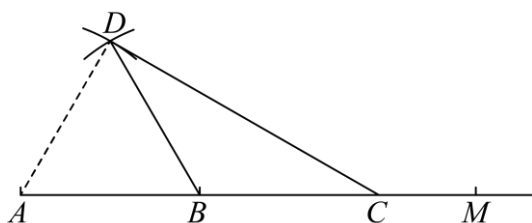
∴一年总供应量为： $365 \times 2 \times 10^5 = 730 \times 10^5 = 7.3 \times 10^2 \times 10^5 = 7.3 \times 10^7 (\text{t})$

因此结果为 $7.3 \times 10^7 \text{t}$.

7. A

【分析】根据作图过程可知 $\triangle ABD$ 是等边三角形，从而得到 $\angle ABD = 60^\circ$ ， $BD = BA$ ，由点 B 在射线 AM 上，在射线 BM 上截取 $BC = BA$ 可知 A 、 B 、 C 三点共线，结合 $BC = BA$ 可得 $BC = BD$ ，利用等腰三角形性质及邻补角定义即可求解.

【详解】解：如图：



由作图可知， $AD = AB = BD$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ABD = 60^\circ$,

$\because$ 点 B 在射线 AM 上, 在射线 BM 上截取 $BC = BA$,

$\therefore A、B、C$ 三点共线,

$\therefore \angle DBC = 180^\circ - \angle ABD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

$\because BC = BA, BD = BA$,

$\therefore BC = BD$,

$\therefore \angle BDC = \angle BCD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DBC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$.

8. B

【分析】先明确 $\triangle AOB$ 的边长特征, 再逐个判断每个结论, 通过计算或举例验证结论是否成立.

【详解】解: $\because A(1,0), B(1,t), t > 0$,

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形, $\angle OAB = 90^\circ$, 三边长为 $OA = 1, AB = t, OB = \sqrt{1+t^2}$,

① 对任意 $t > 0$, 取点 $C(0,t)$, 该点在 y 轴上, 此时 $OC = t = AB, BC = 1 = OA, OB$ 为公共边,

$\therefore \triangle BOC \cong \triangle AOB (SSS)$, 且 C 不与 A 重合,

因此 y 轴上一定存在友好点, ①正确;

② 假设 x 轴上存在友好点 $C(x,0)$, C 不与 A 重合, 也不能与 O 重合 (否则无法构成三角形),

$\because$ 全等三角形斜边相等, 斜边为 OB ,

$\therefore x^2 + (x-1)^2 + t^2 = 1 + t^2$,

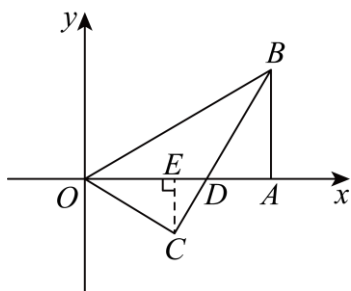
解得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 均不符合要求,

因此 x 轴上不存在友好点, ②错误;

③ 当 $t = 1$ 时, 所有符合条件的友好点为 $(0,1)$ (在 y 轴) 和 $(0,-1)$ (在 y 轴负半轴), 第一象限内没有友好点,

因此不是对所有点 B 都成立, ③错误;

④ 举例: 取 $t = \frac{1}{2}$, 如图, 设 BC 与 x 轴交于点 D , 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ,



$$\because \triangle BOC \cong \triangle OBA,$$

$$\therefore OC = AB = \frac{1}{2}, \quad \angle OBC = \angle BOA,$$

$$\therefore OD = BD,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } BD^2 = AB^2 + AD^2,$$

$$\therefore OD^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - OD)^2,$$

$$\text{解得 } OD = \frac{5}{8},$$

$$\therefore AD = \frac{3}{8},$$

$$\therefore \sin \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{OD} = \frac{3}{5},$$

$$\because \angle ADC = \angle BAD + \angle ABD, \quad \angle ADC = \angle C + \angle COD, \quad \angle C = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = \angle ABD,$$

$$\therefore \sin \angle COD = \sin \angle ABD = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \sin \angle COD = \frac{CE}{OC} = \frac{CE}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CE = \frac{3}{10},$$

$$\therefore OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore C\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}\right), \text{ 该点在第四象限,}$$

因此存在这样的点 B , 使得在第四象限内有 B 的“友好点”, 故④正确,

综上, 正确结论为①④.

9. $x \neq 2$

【分析】根据分式有意义的条件, 分式的分母不等于 0, 列不等式求解即可得到实数 x 的取值范围.

【详解】解: 由题意得, $x - 2 \neq 0$,

解得, $x \neq 2$,

∴实数 x 的取值范围是 $x \neq 2$.

10. $x(x+7)(x-7)$

【详解】解：原式 $= x(x^2 - 49)$

$= x(x+7)(x-7).$

11. 135

【分析】根据多边形内角和可得五边形的内角和为 $180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$ ，然后问题可求解.

【详解】解：根据多边形内角和可知：五边形的内角和为 $180^\circ \times (5-2) = 540^\circ$,

∵ $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$,

∴ $\angle D + \angle E = 540^\circ - 3 \times 90^\circ = 270^\circ$,

∵ $\angle D = \angle E$,

∴ $\angle D = 270^\circ \div 2 = 135^\circ$.

12. 200

【分析】先求出样本中每周体育活动时间小于10 h 的学生人数，计算对应频率，再用全校总人数乘以该频率，即可得到估计结果.

【详解】解：由题意，抽取的样本中，每周体育活动时间小于10 h 的学生人数为 $3+7=10$,

∴该校2000 名学生中应适当增加体育活动时间的学生人数为 $2000 \times \frac{10}{100} = 200$.

13. <

【分析】先将二次函数解析式配方，得到抛物线的开口方向与对称轴，再根据二次函数的增减性，结合 $m > 0$ 判断两点横坐标的位置，即可比较 y_1 与 y_2 的大小.

【详解】解：对函数解析式配方得 $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$,

∵ $a=1 > 0$,

∴抛物线开口向上，对称轴为直线 $x = -2$,

∴当 $x > -2$ 时， y 随 x 的增大而增大，

∵ $m > 0$,

∴ $m+1 > m > 0 > -2$,

∴ $y_1 < y_2$.

14. 3

【分析】由菱形面积公式 $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ ，解得 $AC = 6$ ，故 $AO = \frac{1}{2} AC = 3$.

【详解】解：由题意，若 $\square ABCD$ 是菱形，

则 $\square ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ ，

$\because \square ABCD$ 的面积为 24， BD 的长为 8，

$\therefore 24 = \frac{1}{2} AC \cdot 8$ ．解得 $AC = 6$ ．

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ ．

15. $\frac{4}{3} / 1\frac{1}{3}$

【分析】设点 P 的纵坐标为 m ，根据平行于 x 轴直线上点的纵坐标相等，结合反比例函数解析式表示出点 A 和点 B 的坐标，进而得到点 C 的坐标．利用平行线性质的证明 $\triangle APQ \sim \triangle COQ$ ，根据相似三角形对应边成比例即可求解．

【详解】解： $\because$ 点 P 在 y 轴正半轴上，

$\therefore$ 设点 P 的坐标为 $(0, m)$ ，其中 $m > 0$ ，

$\because$ 直线 AB 平行于 x 轴，

$\therefore$ 点 A 和点 B 的纵坐标均为 m ，

$\because$ 点 A 、 B 分别在函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 和 $y = -\frac{3}{x} (x < 0)$ 的图象上，

$\therefore$ 把 $y = m$ 代入 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ ，得 $x = \frac{4}{m}$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $\left(\frac{4}{m}, m\right)$ ，

把 $y = m$ 代入 $y = -\frac{3}{x} (x < 0)$ ，得 $x = -\frac{3}{m}$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(-\frac{3}{m}, m\right)$ ，

$\because BC \perp x$ 轴于点 C ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(-\frac{3}{m}, 0\right)$ ，

$\therefore AP = \frac{4}{m}$ ， $CO = \left| -\frac{3}{m} \right| = \frac{3}{m}$ ，

$\because AB \parallel x$ 轴，即 $AP \parallel CO$ ，

$\therefore \angle PAQ = \angle OCQ$ ， $\angle APQ = \angle COQ$ ，

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle COQ$ ，

$\therefore \frac{PQ}{QO} = \frac{AP}{CO}$ ，

$$\therefore \frac{PQ}{QO} = \frac{\frac{4}{m}}{\frac{3}{m}} = \frac{4}{3}.$$

16. 34 5

【分析】(1) 求出 A_6 到 A_2 之间有 4 个相邻住宅间隔，即可求解；

(2) 求出学生从 A_k 处总步行时间和以及 6 名学生的校车行驶时间和，可得总时间和为

$$2.5(|1-k|+|2-k|+|3-k|+|4-k|+|5-k|+|6-k|)+156-6k, \text{ 即可求解.}$$

【详解】解：(1) 根据题意得： A_6 到 A_2 之间有 $6-2=4$ 个相邻住宅间隔，

所以住在 A_6 处的学生的理想通勤时间为 $2.5 \times 4 + 1 \times 4 + 20 = 34 \text{ min}$ ；

(2) 车站设在 A_k 处 ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$)，

学生从 A_k 处总步行时间和为 $2.5(|1-k|+|2-k|+|3-k|+|4-k|+|5-k|+|6-k|)$ 。

校车从 A_k 处到学校的行驶时间为 $(6-k) \times 1 + 20 = 26-k$ ，

所以 6 名学生的校车行驶时间和为 $6 \times (26-k) = 156-6k$ ，

总时间和为 $2.5(|1-k|+|2-k|+|3-k|+|4-k|+|5-k|+|6-k|)+156-6k$ ，

$k=1$ 时，总时间和为 $2.5 \times (0+1+2+3+4+5)+150 = 2.5 \times 15 + 150 = 187.5$ ；

$k=2$ 时，总时间和为 $2.5 \times (1+0+1+2+3+4)+144 = 2.5 \times 11 + 144 = 171.5$ ；

$k=3$ 时，总时间和为 $2.5 \times (2+1+0+1+2+3)+138 = 2.5 \times 9 + 138 = 160.5$ ；

$k=4$ 时，总时间和为 $2.5 \times (3+2+1+0+1+2)+132 = 2.5 \times 9 + 132 = 154.5$ ；

$k=5$ 时，总时间和为 $2.5 \times (4+3+2+1+0+1)+126 = 2.5 \times 11 + 126 = 153.5$ ；

$k=6$ 时，总时间和为 $2.5 \times (5+4+3+2+1+0)+120 = 2.5 \times 15 + 120 = 157.5$ ；

因为 $187.5 > 171.5 > 160.5 > 157.5 > 154.5 > 153.5$ ，

所以 $k=5$ 时，总时间和最小，

17. $\sqrt{3}+1$

【详解】解：原式 $= \sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 1 + 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \sqrt{3} + 1.$$

18. $-3 < x < 2$

【详解】解：原不等式组为
$$\begin{cases} 3(x+1) > x-3 \text{①} \\ \frac{3x-4}{2} < x-1 \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，得 $x > -3$

解不等式②，得 $x < 2$.

所以原不等式组的解集为 $-3 < x < 2$.

19. $\frac{2}{5}$

【详解】解：原式 $= \frac{2x+2y-6y}{(x-2y)^2}$

$$= \frac{2(x-2y)}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{2}{x-2y},$$

$$\because x-2y-5=0,$$

$$\therefore x-2y=5,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{2}{5}.$$

20. (1)证明：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， E 为 BC 的中点，

$$\therefore BC = 2AE,$$

$$\because BC = 2BF,$$

$$\therefore AE = BF,$$

又 $AE \parallel BF$,

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形；

(2) $\frac{9}{4}$

【分析】(1) 根据直角三角形的性质可得 $BC = 2AE$ ，从而得到 $AE = BF$ ，即可求证；

(2) 根据三角形中位线定理可得 $DE = \frac{1}{2}AC$ ， $DE \parallel AC$ ，从而得到 $AD = 1$ ， $DE = \frac{3}{2}$ ，再由四边形 $DBFE$ 的面积 $= \square ABFE$ 的面积 $- \triangle ADE$ 的面积，即可求解.

【详解】(1) 略

(2) 解： $\because D, E$ 分别为 AB, BC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC, DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore ED \perp AB,$$

$$\because AB = 2, AC = 3,$$

$$\therefore AD = 1, DE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \square ABFE \text{ 的面积为 } DE \times AB = 3, \triangle ADE \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} DE \times AD = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{四边形 } DBFE \text{ 的面积} = \square ABFE \text{ 的面积} - \triangle ADE \text{ 的面积} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

21. (1) k 的值为 2, b 的值为 3

$$(2) \frac{1}{2} \leq m \leq 5$$

【分析】(1) 将两点坐标代入一次函数解析式, 构建二元一次方程组, 解方程组求出 k , b ;

(2) 先写出一一次函数解析式, 整理不等式 $mx < 2x + 3$, 分 $m < 2$ 、 $m > 2$ 、 $m = 2$ 三类讨论, 结合 x 的取值范围列不等式求解, 合并得到 m 的范围.

【详解】(1) 解: $\because$ 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-2, -1)$ 和 $(1, 5)$,

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = -1 \\ k + b = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore k$ 的值为 2, b 的值为 3;

(2) 由 (1) 可得, 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的解析式为: $y = 2x + 3$,

$\because$ 当 $-2 < x < 1$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的值小于函数 $y = 2x + 3$ 的值,

$\therefore$ 当 $-2 < x < 1$ 时, $mx < 2x + 3$, 即 $(m - 2)x < 3$,

$$\because \text{当 } m < 2 \text{ 时, } x > \frac{3}{m - 2},$$

$$\therefore \frac{3}{m - 2} \leq -2,$$

$$\text{解得 } \frac{1}{2} \leq m < 2,$$

$$\because \text{当 } m > 2 \text{ 时, } x < \frac{3}{m - 2},$$

$$\therefore \frac{3}{m - 2} \geq 1,$$

解得 $2 < m \leq 5$,

∵当 $m=2$ 时, $(2-2)x < 3$ 恒成立,

∴ $m=2$ 符合题意,

综上所述: $\frac{1}{2} \leq m \leq 5$.

22. A 类机器人的速度为 350m/min , 比赛起点到终点的路程为 21000m

【分析】根据赛道总路程不变, 设 A 类机器人速度为 x , 得出全程路程 $60x$; 再根据 B 类成绩规则, 由公示成绩 72min 算出它含维护的实际总耗时 60min , 拆分出两段行驶时长与对应速度, 将两段行驶路程相加, 与总路程相等建立方程求解.

【详解】设这台 A 类机器人的速度为 $x\text{m/min}$,

由题意可知, $25 \times 1.1x + \left(\frac{72}{1.2} - 25 - 10\right)(1.1x + 70) = 60x$,

解得 $x = 350$,

所以 $60x = 21000$,

答: 这台 A 类机器人的速度为 350m/min , 此次比赛从起点到终点的路程为 21000m .

23. (1)2; 2

(2)>

(3)不是, 当丙 8 轮的得分分别为 0, 0, 0, 2, 3, 3, 3, 3 时, 丙 8 轮得分的中位数为 2.5, 但平均数为 1.75, 小于乙 8 轮得分的平均数.

【分析】(1) 根据统计图得出甲、乙的得分, 进而求得平均数;

(2) 利用方差公式即可求解;

(3) 举例子说明.

【详解】(1) 解: 甲 8 轮得分的平均数为: $\frac{0 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 4}{8} = \frac{0 + 2 + 2 + 12}{8} = \frac{16}{8} = 2$;

乙 8 轮得分的平均数为: $\frac{2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 0 + 3}{8} = \frac{16}{8} = 2$

(2) 解: $s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{8} \times [1 \times (0-2)^2 + 2 \times (1-2)^2 + 1 \times (2-2)^2 + 4 \times (3-2)^2]$
 $= \frac{1}{8} \times (4 + 2 + 0 + 4)$
 $= \frac{10}{8}$
 $= 1.25$
 $s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{8} \times [(2-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 \times 4 + (0-2)^2 + (3-2)^2]$
 $= \frac{1}{8} \times (0 + 1 + 0 + 4 + 1)$

$$= \frac{6}{8}$$

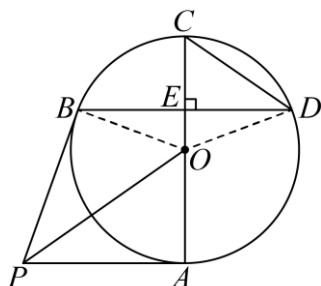
$$= 0.75$$

$$\therefore 1.25 > 0.75,$$

$$\therefore s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2.$$

(3) 解：略.

24. (1) 证明：连接 OB ， OD ，



$\because A, C, D$ 是 $\odot O$ 上的点，

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD,$$

$\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的两条切线，

$$\therefore PA = PB, PA \perp OA, PB \perp OB,$$

$\therefore$ 点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，

$\therefore OP$ 平分 $\angle AOB$ ，

$$\therefore \angle POA = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$\because BD \perp AC$ ， AC 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle AOD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle POA.$$

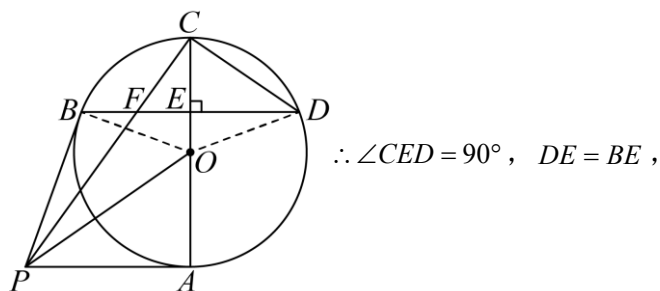
$$(2) BF = \sqrt{2}$$

【分析】(1) 连接 OB ， OD ，根据切线性质可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上，根据垂径定理可知 $AB = AD$ ，再根据圆周角，圆心角的关系即可得证；

(2) 先由垂径定理求出 $\odot O$ 的半径，再解直角三角形 POA ，可得 PA ，根据相似三角形的性质可求 EF ，由 $DE = BE$ 即可求解.

【详解】(1) 略.

(2) 解： $\because BD \perp AC$ ， AC 为 $\odot O$ 的直径，



在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中, $CE = 2$, $\tan \angle ACD = \sqrt{2}$,

$$\therefore DE = 2\sqrt{2}.$$

设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OD = r$, $OE = r - 2$,

在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中, 由 $OE^2 + DE^2 = OD^2$,

$$\text{得 } (r - 2)^2 + (2\sqrt{2})^2 = r^2,$$

解得 $r = 3$.

在 $\text{Rt}\triangle POA$ 中, $OA = 3$, $\tan \angle POA = \tan \angle ACD = \sqrt{2}$,

$$\therefore PA = 3\sqrt{2},$$

$$\because \angle CEB = \angle CAP = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \parallel PA,$$

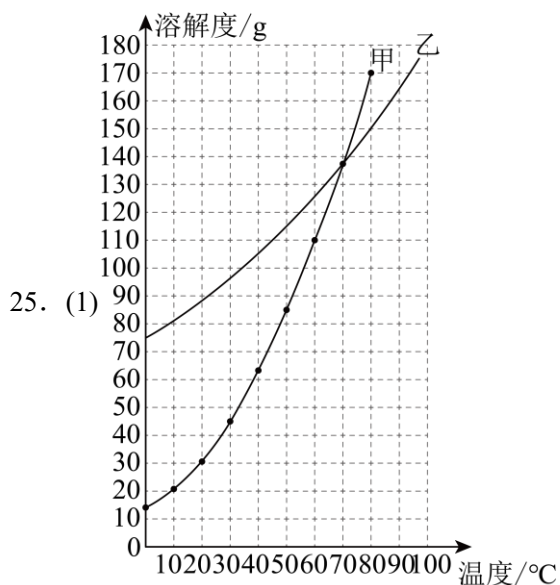
$$\therefore \triangle CFE \sim \triangle CPA,$$

$$\therefore \frac{FE}{PA} = \frac{CE}{CA},$$

$$\text{即 } \frac{EF}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{6},$$

$$\therefore FE = \sqrt{2},$$

$$\therefore BF = BE - FE = DE - FE = \sqrt{2}.$$



(2)70 (答案不唯一); 58 (答案不唯一)

(3)①57 (答案不唯一); ②401 (答案不唯一)

【分析】(1) 根据表格信息描点连线即可;

(2) 根据 (1) 中函数图象判断即可;

(3) ①根据 (1) 中函数图象判断甲、乙溶解度达到100g 的温度, 取较大值即可;

②根据 (1) 中函数图象得到10°C 时甲、乙溶解度, 进而求出溶解100g 甲、乙需要的水的总质量, 求出 m_1 、 m_2 的值, 计算 $m_1 + m_2$ 即可.

【详解】(1) 略;

(2) 解: 由函数图象可知, 当温度约为70°C (精确到个位) 时, 甲和乙的溶解度相同;
此时溶解度 $n \approx 138\text{g}$,

降温到10°C, 乙溶解度约为80g,

因此析出乙的质量为 $138 - 80 = 58(\text{g})$;

(3) ①解: 要让100g 溶质完全溶解在100g 水中, 溶解度需要至少达到100g.

对甲来说, 溶解度达到100g 的温度约为57°C,

对乙来说, 溶解度达到100g 的温度约为35°C,

因此 T 的最小值为57°C;

②解: 10°C 时甲溶解度约为21g, 设溶解100g 甲需要的水的总质量为 x ,

$$\text{由 } \frac{21\text{g}}{100\text{g}} = \frac{100\text{g}}{x}$$

解得: $x \approx 476\text{g}$,

因此需要加水 $476 - 100 = 376(\text{g})$,

即 $m_1 = 376$;

10°C 时乙溶解度约为80g, 同理得溶解100g 乙需要的水的总质量为125g,

因此需要加水 $125 - 100 = 25(\text{g})$,

即 $m_2 = 25$;

$\therefore$ 最终 $m_1 + m_2 = 376 + 25 = 401$.

$$26. (1) b = -2, c = \frac{1-a}{a}$$

$$(2) a < \frac{1}{2} \text{ 且 } a \neq 0$$

【分析】(1) 利用抛物线过 $\left(0, \frac{1-a}{a}\right)$ 直接得 c ，再套用对称轴公式 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{a}$ ，化简求出 b ；

(2) 先写出顶点为 $M(t, y_1)$ 的平移后抛物线 C_2 ，代入原点 $(0, 0)$ 得到关于 t 的一元二次方程，方程无实数根则判别式 $\Delta < 0$ ，解不等式得到 a 范围.

【详解】(1) 解： $\because$ 抛物线 $C_1: y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $\left(0, \frac{1-a}{a}\right)$,

$$\therefore c = \frac{1-a}{a}.$$

$\because$ 抛物线 C_1 的对称轴为 $x = \frac{1}{a}$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{1}{a}.$$

$$\therefore b = -2;$$

(2) 解：设点 $M(t, y_1)$,

$\because M$ 是抛物线 C_1 上的点,

$$\therefore y_1 = at^2 - 2t + \frac{1-a}{a}.$$

由题意，抛物线 $C_2: y = a(x-t)^2 + at^2 - 2t + \frac{1-a}{a}$,

设抛物线 C_2 与 y 轴交于点 $N(0, y_2)$ ，则 $y_2 = 2at^2 - 2t + \frac{1-a}{a}$.

$\because$ 无论 t 为何值，抛物线 C_2 都不经过点 O ,

$\therefore$ 无论 t 为何值，都有 $y_2 \neq 0$,

$\therefore$ 关于 t 的方程 $2at^2 - 2t + \frac{1-a}{a} = 0 (a \neq 0)$ 没有实数根.

$$\therefore \Delta < 0, \text{ 即 } 4 - 8a \cdot \frac{1-a}{a} < 0.$$

$$4 - 8(1-a) < 0,$$

化简得： $8a - 4 < 0$,

$$\text{解得：} a < \frac{1}{2},$$

$$\therefore a < \frac{1}{2} \text{ 且 } a \neq 0.$$

27. (1) 证明： $\because l \perp AC$,

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = \alpha = 30^\circ, \quad \angle ABM = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABM,$$

$$\therefore AC \parallel MB,$$

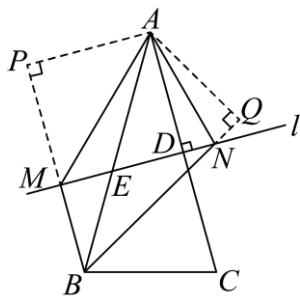
$$\therefore \angle BME = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = 2DE, \quad BE = 2EM,$$

$$\therefore AB = AE + BE = 2DE + 2EM = 2DM;$$

(2)解: $\angle MAN$ 的大小为 60° ,

证明: 如图, 过点 A 分别作 BM , BN 的垂线, 分别交 BM , BN 的延长线于点 P , Q ,



在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中, $\angle ABM = 30^\circ$,

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AB,$$

$\because D$ 是 AC 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD = AP,$$

$$\because \angle ADM = 90^\circ = \angle P,$$

又 AM 是 $\text{Rt}\triangle ADM$ 和 $\text{Rt}\triangle APM$ 的公共边,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADM \cong \text{Rt}\triangle APM (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle DAM = \angle PAM,$$

$$\because \angle ABN = \angle ABM = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = AQ,$$

$$\because \angle ADN = 90^\circ = \angle Q,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADN \cong \text{Rt}\triangle AQN (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle DAN = \angle QAN,$$

$$\because \angle PAQ + \angle Q + \angle QBP + \angle P = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ = 120^\circ,$$

$$\text{即 } 2\angle DAM + 2\angle DAN = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle MAN = \angle DAM + \angle DAN = 60^\circ.$$

【分析】(1) $l \perp AC$ 得 $\angle ADE = 90^\circ$ ，通过 $\angle BAC = \alpha = 30^\circ$ ， $\angle ABM = 30^\circ$ ，所以 $\angle BAC = \angle ABM$ ，则有 $AC \parallel MB$ ，然后通过直角三角形的性质可得 $AE = 2DE$ ， $BE = 2EM$ ，再由线段的和与差即可求解；

(2) 过点 A 分别作 BM ， BN 的垂线，分别交 BM ， BN 的延长线于点 P ， Q ，分别证明

$\text{Rt}\triangle ADM \cong \text{Rt}\triangle APM$ (HL)， $\text{Rt}\triangle ADN \cong \text{Rt}\triangle AQN$ (HL)，所以 $\angle DAN = \angle QAN$ ，又

$\angle PAQ + \angle Q + \angle QBP + \angle P = 360^\circ$ ，则 $\angle PAQ = 120^\circ$ ，即 $2\angle DAM + 2\angle DAN = 120^\circ$ ，从而可得

$$\angle MAN = \angle DAM + \angle DAN = 60^\circ.$$

【详解】(1) 略；

(2) 略.

$$28. (1)(-1, -1), \sqrt{2}\pi$$

$$(2) \text{点 } F \text{ 的坐标为 } (-1, \sqrt{3})$$

$$(3) -\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

【分析】(1) 先根据 B 、 C 两点坐标求出 BC 的垂直平分线，再结合“过点 A 且与 BC 平行”的条件进而得到弧心坐标，最后计算半径与圆心角，代入弧长公式即可；

(2) 先根据平行线的性质得出直线 EF 与 OD 的一次项系数相等，利用待定系数法代入点 E 坐标求出直线 EF 的一次函数解析式；再根据同圆半径相等得到 $OF = OE$ ，结合勾股定理列出坐标方程，联立直线解析式求解并舍去已知点 E 对应的解，即可得到点 F 的坐标；

(3) 先利用同圆半径相等和勾股定理求出 MN 的长度，再通过作垂线构造矩形得到 $\angle M$ 、 $\angle N$ 为非钝角的有效线段长度；再分 $t \geq 0$ 和 $t < 0$ 两种情况，结合勾股定理逆定理判断 $\angle P$ 是否为钝角，根据 $PQ = 1$ 的条件列不等式求解；最后合并两种情况的取值范围即可.

【详解】(1) 解：由题意可知：弧心在过点 A 且与 BC 平行的直线上，且弧心是 BC 所在圆的圆心，

$\therefore$ 弧心到 B 、 C 距离相等，即在 BC 的垂直平分线上，

$\therefore B(-3, 1)$ ， $C(1, 1)$ ， BC 为水平线段（平行于 x 轴），

$\therefore$ 过 $A(-2, -1)$ 且平行于 BC 的直线为水平线： $y = -1$ ，

$\therefore BC$ 中点为 $(-1, 1)$ ，其垂直平分线为竖直线： $x = -1$ ，

$\therefore$ 两直线交点即为弧心，坐标为 $(-1, -1)$ ，

$\therefore$ 弧心到 B 、 C 距离相等，

$$\therefore \text{半径 } r \text{ 为弧心到点 } B \text{ 的距离：} r = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore B(-3,1), C(1,1),$$

$$\therefore BC = 4,$$

$\therefore B、C$ 与弧心构成直角三角形，

$\therefore$ 圆心角为 90° ，

$$\therefore BC \text{ 的长} = \frac{90^\circ \times 2\sqrt{2} \times \pi}{180^\circ} = \sqrt{2}\pi.$$

(2) 解：设直线 OD 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\text{将 } D(-2\sqrt{3}, 2), O(0, 0) \text{ 代入得: } \begin{cases} 2 = -2\sqrt{3}k + b \\ 0 = b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } OD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$\therefore EF \parallel OD$ ，

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b_1,$$

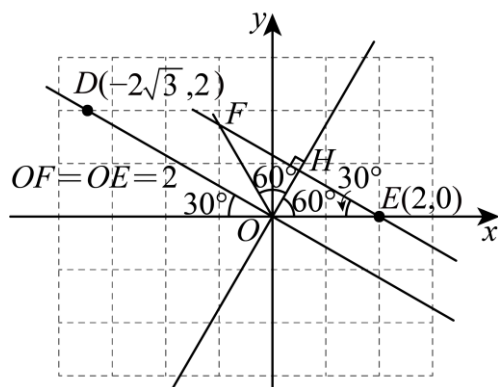
$$\therefore E(2, 0),$$

$$\therefore \text{直线 } EF \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \triangle D-EF$ 的弧心为 O ，

$$\therefore OF = OE = 2,$$

设点 F 坐标为 (x, y) ，过点 F 作 $FH \perp x$ 轴于点 H ，



$$\therefore OH^2 + FH^2 = OF^2,$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 2^2 = 4,$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore x^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4,$$

解得： $x_1 = 2$ （与点 E 重合，舍去）， $x_2 = -1$ ，

将 $x = -1$ 代入 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，解得 $y = \sqrt{3}$ ，

故 F 的坐标为 $(-1, \sqrt{3})$ 。

（3）解：弧心为 O ，故 $OM = ON = 1$ ，即 N 在单位圆上，

设点 N 的坐标为 (t, n) ，

根据勾股定理可得 $t^2 + n^2 = r^2 = 1$ ，

过点 M 、 N 分别作坐标轴平行线，得： $MN^2 = (1-t)^2 + n^2$ ，

代入 $t^2 + n^2 = 1$ ，得 $MN = \sqrt{2-2t}$ ，

由题意可得已知直线 PQ 过原点 O ，且 $PQ \parallel MN$ ，

分别过点 M 、 N 作 MN 的垂线，交直线 PQ 于 P_1 、 P_2 两点，

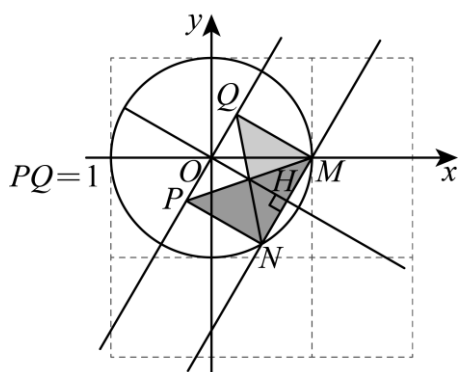
当点 P 在线段 P_1P_2 上时， $\angle PMN$ 、 $\angle PNM$ 均为直角或锐角（非钝角）；

若 P 在 P_1 左侧或 P_2 右侧，对应角为钝角；

由 $PQ \parallel MN$ 、 $MP_1 \perp MN$ 、 $NP_2 \perp MN$ ，可判定四边形 MP_1P_2N 是矩形，

根据矩形对边相等得： $P_1P_2 = MN = \sqrt{2-2t}$ ，

情况 1：当 $t \geq 0$ 时，



当 P 与原点 O 重合时， $OM = ON = 1$ ，

代入得： $MN^2 = 2-2t \leq 2 = OM^2 + ON^2$ ，

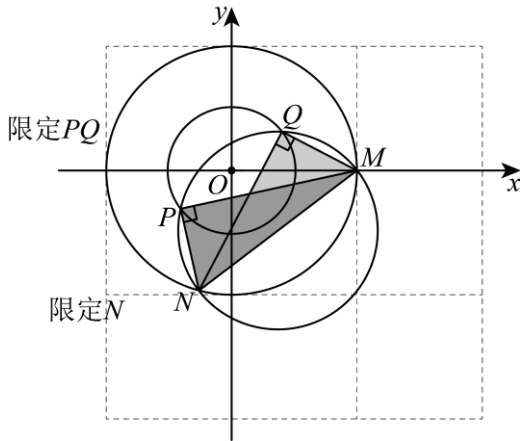
此时 $\angle MON$ 为非钝角，因此整条线段 P_1P_2 都满足三角形非钝角的要求，有效区域长度为 $\sqrt{2-2t}$ ，

要存在 $PQ=1$ ，需有效长度 $\sqrt{2-2t} \geq 1$ ，

解得 $t \leq \frac{1}{2}$ ，

结合 $t \geq 0$ 得 $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ；

情况 2：当 $t < 0$ 时，



当 P 与原点 O 重合时， $MN^2 = 2 - 2t > 2 = OM^2 + ON^2$ ，

因此直线 PQ 上，原点附近一段区域会使 $\angle MPN$ 为钝角，

设 MN 中点为 O' ， $\therefore O' \left(\frac{1+t}{2}, \frac{n}{2} \right)$ ，

$$r = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{2-2t}}{2}, \quad r^2 = \frac{1-t}{2},$$

$$\therefore n^2 = 1 - t^2 = (1-t)(1+t),$$

$$\therefore \text{圆心到直线 } PQ \text{ 的距离 } d \text{ 的平方 } \frac{1+t}{2},$$

$$\therefore L = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{-t},$$

要存在 $PQ=1$ ，需钝角区域宽度 $2\sqrt{-t} \leq 1$ ，

解得 $t \geq -\frac{1}{4}$ ，

结合 $t < 0$ 得 $-\frac{1}{4} \leq t < 0$ ；

合并两种情况，得 t 的取值范围为 $-\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ 。