

2025-2026 学年北京市十一学校七年级（上）期中数学试卷

一、填空题（1-8 题每题 2 分，9-16 题每题 3 分，共 40 分）

1.（2 分）若 $x+3$ 的相反数是 -8 ，则 $x=$ _____.

2.（2 分）如图，数轴上点 A 对应的数为 a ，点 B 对应的数为 b ，且 a 是最大的负整数， b 是 $\frac{1}{2}$ 的倒数，则线段 AB 的长为_____.



3.（2 分）2025 年投入乡村振兴资金为 1250 亿元，将“1250 亿”用科学记数法表示为_____.

4.（2 分）若一个多项式每项的次数都相等，则称该多项式为齐次多项式. 例如 $3x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ 是四次齐次多项式. 已知 $x^2y^m - 3x^ny^3 + 2x^4y - x^3y^2$ 是齐次多项式，则 m^n 的值为_____.

5.（2 分）若关于 x 的多项式 $(x+k)(x^2+2x-2)$ 展开后不含有二次项，则 k 的值为_____.

6.（2 分）已知， $|a| = -a$ ， $\frac{|b|}{b} = -1$ ， $|c| = c$ ，化简 $|a+b| - |a-c| - |b-c| =$ _____.

7.（2 分）若 $a^2+ab=3$ ， $ab+b^2=4$ ，则 $2a^2+3ab+b^2=$ _____.

8.（2 分）已知 $A = -2x$ ， B 是多项式，在计算 $A-B$ 时，小马虎同学把 $A-B$ 看成了 $A \times B$ ：结果得 $4x^2 - 6x$ ，则 $A-B=$ _____.

9.（3 分）若多项式 $kx^2 - xy - 3y^2 + 3x - 7y - 2$ 能分解成两个一次因式的积，则 $(k-5)^k$ 的值为_____.

10.（3 分）当 $x = -1$ 时， $2ax^2 - 3bx + 8$ 的值为 18，则 $-12b - 8a - 4$ 的值为_____.

11.（3 分）下列结论：①若 $|x| = |-3|$ ，则 $x = \pm 3$ ；②若 $|x| = |y|$ ，则 $x = y$ ；③若 $x+y=0$ ，则 $\frac{|x|}{|y|} = 1$ ；④

已知 a, b, c 均为非零有理数，若 $a < 0$ ， $a+b < 0$ ， $a+b+c < 0$ ，则 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc}$ 的值为 2 或 -2. 其

中，正确的结论是_____（填写序号）.

12.（3 分）已知 $abc < 0$ ， $a+b+c=0$ ，若 $x = \frac{|b+c|}{a} + \frac{2|a+c|}{b} - \frac{3|a+b|}{c}$ ，则 x 的最大值与最小值的乘积为_____.

13.（3 分）计算 $\frac{20252024^2}{20252023^2 + 20252025^2 - 2}$ 的结果为_____.

14.（3 分）令 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的值为_____.

15.（3 分）若 $s = a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b + 3$ ，则 s 的最小值为_____.

16.（3 分）实数 x, y, z, w 满足 $\frac{(2^{2x}+1)(2^{2y}+2)(2^{2z}+4)(2^{2w}+8)}{128} = 2^{x+y+z+w}$ ，则 $x^2+y^2+z^2+w^2 =$ _____.

二、计算下列各式的值（每题 3 分，共 12 分）

17. (12 分) (1) $-3^2 - (-3)^2 + 2^3 - (-2)^3 - (-2 \times 3)^2$;

(2) $24 \times (\frac{1}{6} - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}) + (-\frac{1}{3})^2 \div (-\frac{1}{72}) + (-\frac{1}{2})^{-3}$;

(3) $-\frac{2}{9} \times (-92) + (-\frac{2}{9}) \times 34\frac{3}{5} + \frac{2}{9} \times 23\frac{3}{5}$;

(4) $(2x^2 \cdot 26x^{n-1} - 32x^5 \cdot x^{n-3}) \div [(-4x^n) \div x^2]$.

三、因式分解（每题 3 分，共 18 分）

18. (18 分) 因式分解:

(1) $16m^2 - 16m + 4$;

(2) $9x^4y^2 + 45x^2y^2 - 54y^2$;

(3) $x^4 + x^3 + x^2 + x$;

(4) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;

(5) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy + 7yz + 2xz$;

(6) $x^4 - 10x^3 + x^2 - 9$.

四、解答题（19~21 题每题 8 分，22 题 6 分，共 30 分）

19. (8 分) (1) 先化简，再求值: $(x - \frac{1}{3}y)^2 - (\frac{1}{3}y + 2x)(\frac{1}{3}y - 2x) - 5x^2$, 其中 $x = -2$, $y = 9$;

(2) 已知数 a 、 b 满足 $2 \times 3^a \times 3^{2b} = 54$, 求代数式 $(2a - b)^2 - 3(a - b)(a + b) + 8(ab - 2)$ 的值.

20. (8 分) (1) 若 $xy = 8$, 且 $\frac{1}{2}x^3y - x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3 = 16$, 求 $x - y$ 的值.

(2) 若 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $\frac{x^3 + \frac{1}{3} + 7}{x^4 + \frac{1}{x^4} + 3}$ 的值.

21. (8 分) 对于 a 、 b , 定义了一种新运算 “ $\star$ ” 为: $a \star b = \begin{cases} \frac{a+b}{5}, & a \geq b \\ \frac{a-b}{5}, & a < b \end{cases}$.

如: $7 \star 3 = \frac{7+3}{5} = 2$, $1 \star 3 = \frac{1-3}{5} = -\frac{2}{5}$.

(1) 计算: ① $2 \star (-7) =$; ② $(-14) \star (-1) =$.

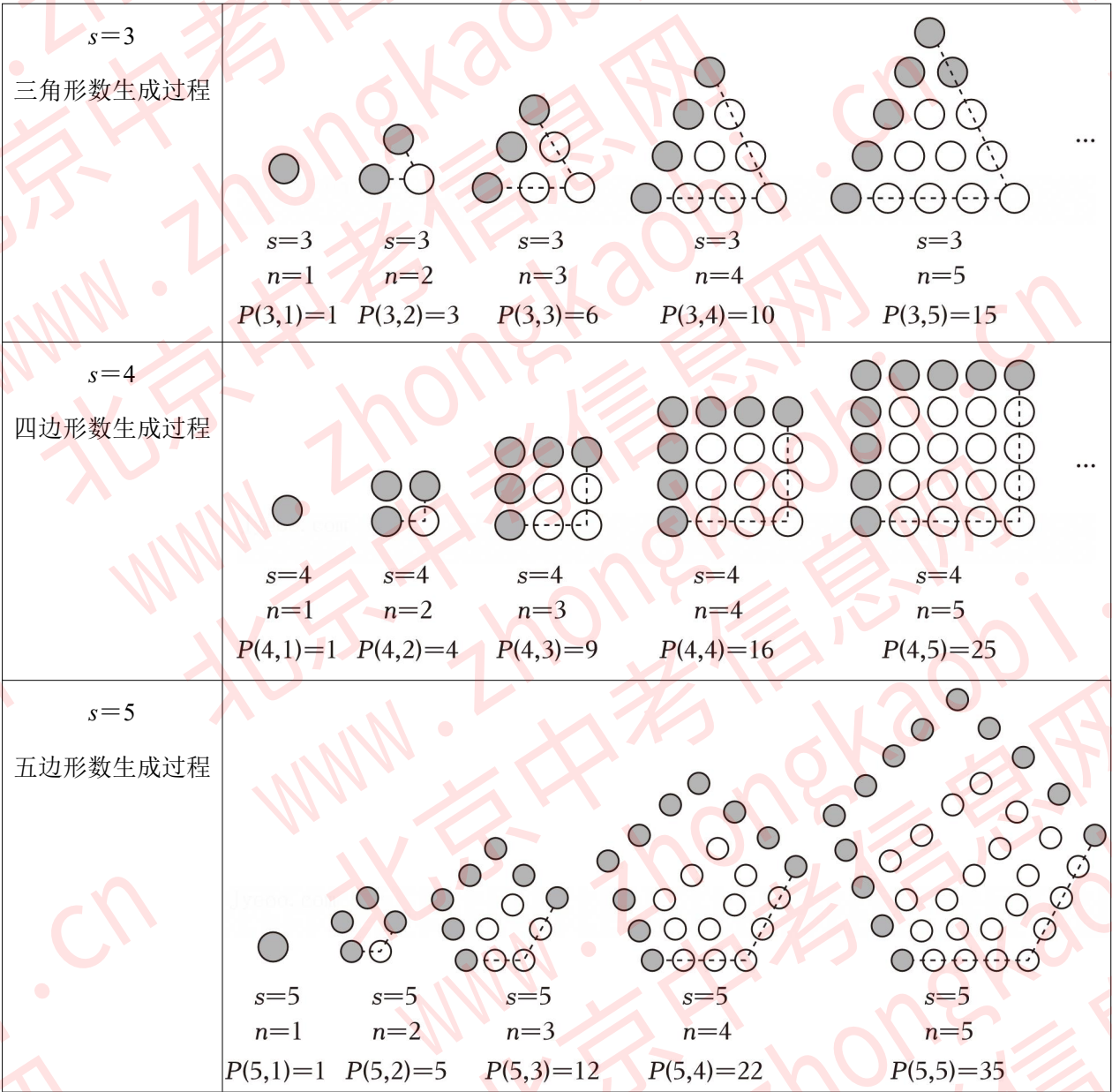
(2) 若 $A = 2x^2 + ax - y + 6$, $B = 3bx^2 - 15x + 6y - 7$, 且当 $A < B$ 时, $A \star B$ 的值与字母 x 的取值无关, 求 a , b 的值.

(3) 在 (2) 的条件下, 求 $(b+a) + (2b + \frac{1}{1 \times 2}a) + (3b + \frac{1}{2 \times 3}a) + \dots + (15b + \frac{1}{14 \times 15}a)$ 的值.

22. (6 分) 多边形数是一类有趣的图形数, 它们表示可以在平面上用点排成某种正多边形形状的整数. 对于一个正 s 边形 ($s \geq 3$), 其第 n 个多边形数, 记作 $P(s, n)$

多边形类型	名称	数值
$s=3$	三角形数	1, 3, 6, 10, 15, ...
$s=4$	正方形数	1, 4, 9, 16, 25, ...
$s=5$	五边形数	1, 5, 12, 22, 35, ...

以下给出多边形数的生成过程. 对于一个 s 边形数, 当 $n=1$ 时, $P(s, 1)=1$, 即第一个 s 边形数一定是 1. 第 n 个 s 边形数由第 $n-1$ 个 s 边形数生成: 首先, 基于第 $n-1$ 个 s 边形的两条相邻的边, 每条边新增一个格点, 使得这两条边各有 n 个格点; 然后, 再补齐其他的边, 使得最外层的每条边有 n 个格点; 最后, 计算总格点数.



以五边形数 ($s=5$) 为例, 当 $n=2$, 最外层的每条边有 2 个格点, $P(5, 2)=5$; 当 $n=3$ 时, 将 $n=2$

时的五边形的右下两条相邻的边各增加一个格点，保证这两条边中每条边有 3 个格点；然后，再补上其他三条边，保证每条边有 3 个格点；最后，整个图形有 12 个格点（实心格点数和空心格点数之和），即 $P(5, 3) = 12$ 。为了能够更好的理解 $P(s, n)$ 的计算方法，我们在上表中也给了 $s=3$ 的三角形数和 $s=4$ 的四边形数的图形生成和计算过程。

(1) 请直接写出第 6 个五边形数的值： $P(5, 6) =$ _____。

(2) 小明通过总结规律发现：

第 n 个三角形数可以通过以下公式计算： $P(3, n) = \frac{(3-2)n^2 - (3-4)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$ ；

第 n 个四边形数可以通过以下公式计算： $P(4, n) = \frac{(4-2)n^2 - (4-4)n}{2} = n^2$ ；

请你通过观察小明总结的规律，总结第 n 个五边形数的计算公式：

$P(5, n) =$ _____。（提示：总结完公式后，代入到原题例子中验证一下是否正确。）

猜想，对于第 n 个 s 边形数，其计算公式为： $P(s, n) =$ _____。

(3) 若 $P(7, n) \cdot P(4, n) \div P(3, n)$ 的余式为 $\alpha \cdot P(4, n) + \beta \cdot P(3, n) + \gamma$ ，其中 α, β, γ 为常数，请直接写出 α, β, γ 的值： $\alpha =$ _____； $\beta =$ _____； $\gamma =$ _____。

2025-2026 学年北京市十一学校七年级（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（1-8 题每题 2 分，9-16 题每题 3 分，共 40 分）

1.（2 分）若 $x+3$ 的相反数是 -8 ，则 $x=$ 5 .

【分析】根据相反数的意义求解即可.

【解答】解：由题意，得

$$x+3+(-8)=0,$$

解得 $x=5$,

故答案为：5.

【点评】本题考查了相反数，利用相反数的和为零得出方程是解题关键.

2.（2 分）如图，数轴上点 A 对应的数为 a ，点 B 对应的数为 b ，且 a 是最大的负整数， b 是 $\frac{1}{2}$ 的倒数，则线段 AB 的长为 3 .



【分析】根据最大的负整数，倒数的含义得到 $a=-1$ ， $b=2$ ，再根据数轴上两点之间的距离公式即可解答.

【解答】解：根据题意得，

$$a=-1, b=2,$$

$$\therefore \text{线段 } AB \text{ 的长为 } 2-(-1)=3.$$

故答案为：3.

【点评】本题考查了最大的负整数，倒数的含义，数轴上两点之间的距离，根据题意得到 a 、 b 的值是解题的关键.

3.（2 分）2025 年投入乡村振兴资金为 1250 亿元，将“1250 亿”用科学记数法表示为 1.25×10^{11} .

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：1250 亿 $= 125000000000 = 1.25 \times 10^{11}$.

故答案为： 1.25×10^{11} .

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (2分) 若一个多项式每项的次数都相等, 则称该多项式为齐次多项式. 例如 $3x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ 是四次齐次多项式. 已知 $x^2y^m - 3x^n y^3 + 2x^4y - x^3y^2$ 是齐次多项式, 则 m^n 的值为 9.

【分析】通过分析各项次数, 建立方程求解 m 和 n 的值, 再计算 m^n .

【解答】解: 多项式为 $x^2y^m - 3x^n y^3 + 2x^4y - x^3y^2$ 中, $2x^4y$ 的次数为 $4+1=5$, $-x^3y^2$ 的次数为 $3+2=5$.

∴ 这个多项式是齐次多项式,

∴ 所有项的次数均为 5,

∴ 第一项 x^2y^m 的次数 $2+m=5$,

解得 $m=3$.

第二项 $-3x^n y^3$ 的次数 $n+3=5$,

解得 $n=2$.

故 $m^n=3^2=9$.

故答案为: 9.

【点评】本题主要考查多项式的次数, 根据概念得到一元一次方程是解题的关键.

5. (2分) 若关于 x 的多项式 $(x+k)(x^2+2x-2)$ 展开后不含有二次项, 则 k 的值为 -2.

【分析】先把多项式展开后合并, 然后令二次项系数等于 0, 再解方程即可.

【解答】解: ∵ 多项式 $(x+k)(x^2+2x-2) = x^3 + (k+2)x^2 + (2k-2)x - 2k$ 不含二次项,

∴ $k+2=0$,

解得 $k=-2$.

故答案为: -2.

【点评】本题考查了合并同类项法则及对多项式“项”的概念的理解, 要知道多项式中的每个单项式叫做多项式的项, 题目设计精巧, 有利于培养学生灵活运用知识的能力.

6. (2分) 已知, $|a|=-a$, $\frac{|b|}{b}=-1$, $|c|=c$, 化简 $|a+b| - |a-c| - |b-c| =$ -2c.

【分析】由已知的等式判断出 a , b 及 c 的正负, 进而确定出 $a+b$, $a-c$ 与 $b-c$ 的正负, 利用绝对值的代数意义化简, 即可得到结果.

【解答】解: ∵ $|a|=-a$, $\frac{|b|}{b}=-1$, 即 $|b|=-b$, $|c|=c$,

∴ $a \leq 0$, $b < 0$, $c \geq 0$,

∴ $a+b < 0$, $a-c \leq 0$, $b-c < 0$,

则原式 $= -a - b + a - c + b - c = -2c$.

故答案为: -2c.

【点评】此题考查了整式的加减，涉及的知识有：去括号法则，以及合并同类项法则，熟练掌握法则是解本题的关键。

7. (2分) 若 $a^2+ab=3$, $ab+b^2=4$, 则 $2a^2+3ab+b^2=$ 10 .

【分析】将 $2a^2+3ab+b^2$ 变形为 $2(a^2+ab)+(ab+b^2)$, 再将 $a^2+ab=3$, $ab+b^2=4$ 代入求值即可.

【解答】解: $2a^2+3ab+b^2=2(a^2+ab)+(ab+b^2)=2\times 3+4=6+4=10$,

故答案为: 10.

【点评】本题考查已知式子的值求代数式的值, 掌握整体代入法是解题的关键.

8. (2分) 已知 $A=-2x$, B 是多项式, 在计算 $A-B$ 时, 小马虎同学把 $A-B$ 看成了 $A\times B$: 结果得 $4x^2-6x$, 则 $A-B=$ -3 .

【分析】由题意可知 $A\times B=4x^2-6x$, $A=-2x$, 结合多项式除以单项式的运算法则即可得出 $B=-2x+3$, 再根据整式的减法法则计算即可得解.

【解答】解: $A=-2x$, B 是多项式, 在计算 $A-B$ 时, 小马虎同学把 $A-B$ 看成了 $A\times B$:

由题意可得: $A\times B=4x^2-6x$, $A=-2x$,

$\therefore B=(4x^2-6x)\div(-2x)=-2x+3$,

$\therefore A-B=-2x-(-2x+3)=-3$,

故答案为: -3.

【点评】本题考查了多项式除以单项式、整式的加减, 理解题意, 熟练掌握相关运算法则是解此题的关键.

9. (3分) 若多项式 $kx^2-xy-3y^2+3x-7y-2$ 能分解成两个一次因式的积, 则 $(k-5)^k$ 的值为 9 .

【分析】由于多项式能分解成两个一次因式的积, 设分解形式为 $(ax+by+c)(dx+ey+f)$, 展开后比较系数, 得到方程组. 通过求解方程组, 得到 $k=2$, 代入表达式 $(k-5)^k$ 计算即可.

【解答】解: 设多项式分解为 $(ax+by+c)(dx+ey+f)$,

展开得: $adx^2+(ae+bd)xy+bey^2+(af+cd)x+(bf+ce)y+cf$,

$$\begin{cases} ad=k \\ ae+bd=-1 \\ be=-3 \\ af+cd=3 \\ bf+ce=-7 \\ cf=-2 \end{cases},$$

由 $be=-3$ 和 $cf=-2$ 取整数解 $b=3$, $e=-1$, $c=1$, $f=-2$.

代入 $ae+bd=a(-1)+3d=-1$ 得 $-a+3d=-1$, $a=3d+1$;

$a=3d+1$ 代入 $af+cd=a(-2)+1\cdot d=-2a+d=3$ 得到 $-2(3d+1)+d=3$,

解得 $d = -1$,

$\therefore a = -2$,

$\therefore k = ad = (-2) \times (-1) = 2$,

验证其他方程均成立.

当 $k = 2$ 时, 代入 $(k-5)^k = (2-5)^2 = 9$,

故答案为: 9.

【点评】 本题考查因式分解的应用, 熟练掌握因式分解是关键.

10. (3 分) 当 $x = -1$ 时, $2ax^2 - 3bx + 8$ 的值为 18, 则 $-12b - 8a - 4$ 的值为 -44.

【分析】 利用整体思想进行计算即可.

【解答】 解: 由题知,

当 $x = -1$ 时,

$$2a \times (-1)^2 - 3b \times (-1) + 8 = 18,$$

则 $2a + 3b = 10$,

所以 $-12b - 8a - 4 = -4(2a + 3b) - 4 = -4 \times 10 - 4 = -44$.

故答案为: -44.

【点评】 本题主要考查了代数式求值, 巧用整体思想是解题的关键.

11. (3 分) 下列结论: ①若 $|x| = |-3|$, 则 $x = \pm 3$; ②若 $|x| = |y|$, 则 $x = y$; ③若 $x + y = 0$, 则 $\frac{|x|}{|y|} = 1$; ④

已知 a 、 b 、 c 均为非零有理数, 若 $a < 0$, $a + b < 0$, $a + b + c < 0$, 则 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} - \frac{|abc|}{abc}$ 的值为 2 或 -2. 其中, 正确的结论是 ①④ (填写序号).

【分析】 本题考查绝对值的意义和有理数的性质. 根据绝对值的定义, 判断结论①和②;

根据相反数和绝对值的关系, 判断结论③;

根据非零有理数的符号性质, 结合条件计算表达式值, 判断结论④.

【解答】 解: 因为 $|-3| = 3$, 所以 $|x| = 3$, 则 $x = \pm 3$, 故①正确;

若 $|x| = |y|$, 则 $x = y$ 或 $x = -y$, 不一定相等, 例如 $x = 3$, $y = -3$ 时 $|x| = |y|$ 但 $x \neq y$, 故②错误;

若 $x + y = 0$, 则 $y = -x$, 但当 $y = 0$ 时, $|y| = 0$, 分母无意义; 即使 $y \neq 0$, $\frac{|x|}{|y|} = 1$ 成立, 但结论未明确 $y \neq 0$, 故③错误;

由于 $a < 0$, 则 $\frac{|a|}{a} = -1$, 由 $a + b < 0$ 和 $a + b + c < 0$, 讨论 b 和 c 的符号:

若 $b > 0$, $c > 0$, 需 $b < |a|$ 且 $b + c < |a|$, 原式 $= -1 + 1 + 1 + 1 = 2$;

若 $b > 0, c < 0$, 原式 $= -1 + 1 - 1 - 1 = -2$;

若 $b < 0, c > 0$, 原式 $= -1 - 1 + 1 - 1 = -2$;

若 $b < 0, c < 0$, 原式 $= -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

所有情况均满足条件, 表达式值为 2 或 -2, 故④正确.

故答案为: ①④.

【点评】本题主要考查了相反数, 绝对值的意义, 正确进行计算是解题关键.

12. (3 分) 已知 $abc < 0, a+b+c=0$, 若 $x = \frac{|b+c|}{a} + \frac{2|a+c|}{b} - \frac{3|a+b|}{c}$, 则 x 的最大值与最小值的乘积为 -24.

【分析】先化简 x 的表达式, 再利用 a, b, c 中负因数的个数为奇数个分别求出最大值与最小值即可求解.

【解答】解: 根据题意可知, $b+c = -a, a+c = -b, a+b = -c$,

$$\therefore x = \frac{|-a|}{a} + \frac{2|-b|}{b} - \frac{3|-c|}{c} = \frac{|a|}{a} + \frac{2|b|}{b} - \frac{3|c|}{c},$$

$\because abc < 0$,

$\therefore a, b, c$ 中负因数的个数为奇数个

$\therefore$ 当 $a > 0, b > 0, c < 0$ 时, x 的最大值为: $x = 1 + 2 + 3 = 6$,

当 $a > 0, b < 0, c > 0$ 时, x 的最小值为: $x = 1 - 2 - 3 = -4$,

$\therefore$ 乘积为: $6 \times (-4) = -24$.

故答案为: -24.

【点评】本题考查了绝对值, 掌握绝对值的定义是解题的关键.

13. (3 分) 计算 $\frac{20252024^2}{20252023^2 + 20252025^2 - 2}$ 的结果为 $\frac{1}{2}$.

【分析】本题考查了完全平方公式的应用, 设 $n = 20252024$, 则 $20252023 = n - 1, 20252025 = n + 1$, 将原表达式转化为关于 n 的简化形式, 从而计算出结果.

【解答】解: 设 $n = 20252024$, 则 $20252023 = n - 1, 20252025 = n + 1$,

$$\therefore \text{原式} = \frac{n^2}{(n-1)^2 + (n+1)^2 - 2} = \frac{n^2}{(n^2 - 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) - 2} = \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了完全平方公式的应用, 将原表达式转化为关于 n 的简化形式是解题关键.

14. (3 分) 令 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 的值为 211.

【分析】将 $x=0$ 代入 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 可得: $a_0 = (2+0)^5 = 32$;

将 $x=1$ 代入 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 可得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 243$ 求解即可.

【解答】解: 将 $x=0$ 代入 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 可得: $a_0 = (0+2)^5 = 32$;

将 $x=1$ 代入 $(x+2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 可得:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (1+2)^5 = 3^5 = 243;$$

$$\therefore \text{原式} = 243 - a_0 = 243 - 32 = 211.$$

故答案为: 211.

【点评】本题主要考查了代数式求值, 掌握特值法是解题的关键.

15. (3分) 若 $s = a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b + 3$, 则 s 的最小值为 $\frac{47}{16}$.

【分析】通过配方法将原式转化为两个完全平方式与常数之和的形式, 根据非负性求最小值.

$$\text{【解答】解: 原式} = (a + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b + 3$$

$$= (a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{4}b + 3$$

$$= (a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}(b - \frac{1}{2})^2 + \frac{47}{16}$$

由于平方项非负, 当 $a + \frac{1}{2}b = 0$ 且 $b - \frac{1}{2} = 0$ 时, s 取最小值 $\frac{47}{16}$,

故答案为: $\frac{47}{16}$.

【点评】本题考查配方法的应用, 正确进行计算是解题关键.

16. (3分) 实数 x, y, z, w 满足 $\frac{(2^{2x}+1)(2^{2y}+2)(2^{2z}+4)(2^{2w}+8)}{128} = 2^{x+y+z+w}$, 则 $x^2+y^2+z^2+w^2 = \frac{7}{2}$.

【分析】首先将原等式进行化简, 然后根据等式左右两边质因数分解的具体情况判断出四个未知数的值.

$$\text{【解答】解: 原式可化为} \frac{(2^{2x}+1)(2^{2y-1}+1)(2^{2z-2}+1)(2^{2w-3}+1) \cdot 2^{1+2+3}}{2^7} = 2^{x+y+z+w};$$

$$\text{即 } (2^{2x}+1)(2^{2y-1}+1)(2^{2z-2}+1)(2^{2w-3}+1) = 2^{x+y+z+w+1};$$

等式的右边是 2 的幂乘积的形式, 那么根据质因数分解定理知: 等式左边也必须是 2 的幂相乘的形式;

显然, $2^{2x} = 2^{2y-1} = 2^{2z-2} = 2^{2w-3} = 1$, 即 $2x = 2y - 1 = 2z - 2 = 2w - 3 = 0$,

$$\text{解得: } x=0, y=\frac{1}{2}, z=1, w=\frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } x^2+y^2+z^2+w^2 = \frac{7}{2}.$$

【点评】题目中既用到了分式的基本性质、幂的运算, 还涉及到质因数分解的相关知识, 难度较大.

二、计算下列各式的值 (每题 3 分, 共 12 分)

17. (12分) (1) $-3^2 - (-3)^2 + 2^3 - (-2)^3 - (-2 \times 3)^2$;

$$(2) 24 \times (\frac{1}{6} - \frac{3}{4} - \frac{5}{8}) + (-\frac{1}{3})^2 \div (-\frac{1}{72}) + (-\frac{1}{2})^{-3};$$

$$(3) -\frac{2}{9} \times (-92) + (-\frac{2}{9}) \times 34\frac{3}{5} + \frac{2}{9} \times 23\frac{3}{5};$$

$$(4) (2x^2 \cdot 26x^{n-1} - 32x^5 \cdot x^{n-3}) \div [(-4x^n) \div x^2].$$

【分析】(1) 先算乘方，再算乘除，最后算加减；

(2) 先算乘方，再算乘除，最后算加减；

(3) 利用乘法分配律计算即可；

(4) 先算括号内的运算，再算单项式除以单项式即可．

【解答】解：(1) 原式 = $-9 - 9 + 8 + 8 - 36$
= -38 ;

(2) 原式 = $24 \times \frac{1}{6} - 24 \times \frac{3}{4} - 24 \times \frac{5}{8} + \frac{1}{9} \div (-\frac{1}{72}) + (-8)$
= $4 - 18 - 15 - 8 - 8$
= -45 ;

(3) 原式 = $\frac{2}{9} \times 92 - \frac{2}{9} \times 34\frac{3}{5} + \frac{2}{9} \times 23\frac{3}{5}$
= $\frac{2}{9} \times (92 - 34\frac{3}{5} + 23\frac{3}{5})$
= $\frac{2}{9} \times 81$
= 18 ;

(4) 原式 = $(52x^{n+1} - 32x^{n+2}) \div (-4x^{n-2})$
= $-13x^3 + 8x^4$.

【点评】本题考查有理数混合运算，整式的混合运算，负整数指数幂，正确进行计算是解题关键．

三、因式分解（每题 3 分，共 18 分）

18. (18 分) 因式分解：

(1) $16m^2 - 16m + 4$;

(2) $9x^4y^2 + 45x^2y^2 - 54y^2$;

(3) $x^4 + x^3 + x^2 + x$;

(4) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;

(5) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xy + 7yz + 2xz$;

(6) $x^4 - 10x^3 + x^2 - 9$.

【分析】(1) 多项式各项系数的最大公约数为 4，提取后简化为 $4(4m^2 - 4m + 1)$ ，括号内二次三项式符

合完全平方公式 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 分解为 $(2m-1)^2$;

(2) 各项均含 $9y^2$ 提取后得 $9y^2(x^4+5x^2-6)$, 将 x^4 视为 $(x^2)^2$, 转化为二次式 t^2+5t-6 ($t=x^2$), 分解为 $(t+6)(t-1)$, x^2-1 用平方差公式分解为 $(x+1)(x-1)$;

(3) 前两项与后两项分别提取公因式 x^3 和 ax , 得 $x^3(x+1)+x(x+1)$, 两组均含 $(x+1)$, 提取后得 $(x+1)(x^3+x)$, 提取公因式 x , 得最终结果;

(4) 将乘积项展开为 $(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2$, 减 12 后得二次式形式, 将 x^2+x 视为整体, 分解二次式 $t^2+3t-10$ ($t=x^2+x$), x^2+x-2 用十字相乘法分解为 $(x+2)(x-1)$;

(5) 按 x 的降幂排列, 将含 y, z 的项合并为关于 x 的一次项系数, 将 $-2y^2+7yz-3z^2$ 分组分解为 $(-2y+z)(y-3z)$, 将整个式子视为关于 x 的二次式, 分解为两个一次因式的乘积;

(6) 假设分解为两个二次式的乘积, 展开后比较系数, 通过尝试 $b=1, d=-9$, 解得 $a=-1, c=-9$, 满足所有系数条件, 将分解后的二次式展开, 确认与原式一致.

【解答】解: (1) $16m^2-16m+4$

$$=4(4m^2-4m+1)$$

$$=4(2m-1)^2;$$

$$(2) 9x^4y^2+45x^2y^2-54y^2$$

$$=9y^2(x^4+5x^2-6)$$

$$=9y^2(x^2+6)(x^2-1)$$

$$=9y^2(x^2+6)(x+1)(x-1);$$

$$(3) x^4+x^3+x^2+x$$

$$=x^3(x+1)+x(x+1)$$

$$=(x+1)(x^3+x)$$

$$=x(x+1)(x^2+1);$$

$$(4) (x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$$

$$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2-12$$

$$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$$

$$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$$

$$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1);$$

$$(5) x^2-2y^2-3z^2+xy+7yz+2xz$$

$$=x^2+(y+2z)x-2y^2+7yz-3z^2$$

$$=x^2-xy+3xz+2xy-2y^2+6yz-xz+yz-3z^2$$

$$=x(x-y+3z)+2y(x-y+3z)-z(x-y+3z)$$

$$=(x+2y-z)(x-y+3z);$$

$$(6) x^4 - 10x^3 + x^2 - 9$$

$$=x^4 + (-9x^3 - x^3) + (-9x^2 + 9x^2 + x^2) + (9x - 9x) - 9$$

$$=x^4 - 9x^3 - 9x^2 - x^3 + 9x^2 + 9x + x^2 - 9x - 9$$

$$=x^2(x^2 - 9x - 9) - x(x^2 - 9x - 9) + (x^2 - 9x - 9)$$

$$=(x^2 - x + 1)(x^2 - 9x - 9).$$

【点评】本题考查因式分解，属于中档题.

四、解答题（19~21 题每题 8 分，22 题 6 分，共 30 分）

19. (8 分) (1) 先化简，再求值：\$(x - \frac{1}{3}y)^2 - (\frac{1}{3}y + 2x)(\frac{1}{3}y - 2x) - 5x^2\$，其中 \$x = -2\$，\$y = 9\$；

(2) 已知数 \$a\$、\$b\$ 满足 \$2 \times 3^a \times 3^{2b} = 54\$，求代数式 \$(2a - b)^2 - 3(a - b)(a + b) + 8(ab - 2)\$ 的值.

【分析】(1) 根据乘法公式展开化简以后代入求值即可；

(2) 根据同底数幂的乘法求出 \$a + 2b = 3\$，再根据乘法公式展开化简以后整体代入求值即可.

【解答】解：(1) 原式 \$= x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2 - (\frac{1}{9}y^2 - 4x^2) - 5x^2\$

$$=x^2 - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{9}y^2 + 4x^2 - 5x^2$$

$$=-\frac{2}{3}xy,$$

$$\text{当 } x = -2, y = 9 \text{ 时, 原式} = -\frac{2}{3}xy = -\frac{2}{3} \times (-2) \times 9 = 12;$$

$$(2) \because 2 \times 3^a \times 3^{2b} = 2 \times 3^{a+2b} = 54 = 2 \times 3^3,$$

$$\therefore a + 2b = 3,$$

$$\therefore \text{原式} = 4a^2 - 4ab + b^2 - 3(a^2 - b^2) + 8ab - 16$$

$$=4a^2 - 4ab + b^2 - 3a^2 + 3b^2 + 8ab - 16$$

$$=a^2 + 4ab + 4b^2 - 16$$

$$=(a + 2b)^2 - 16$$

$$=3^2 - 16$$

$$=-7.$$

【点评】本题考查整式的混合运算及求值，熟练掌握运算是关键.

20. (8 分) (1) 若 \$xy = 8\$，且 \$\frac{1}{2}x^3y - x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3 = 16\$，求 \$x - y\$ 的值.

(2) 若 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 求 $\frac{x^3 + \frac{1}{x^3} + 7}{x^4 + \frac{1}{x^4} + 3}$ 的值.

【分析】(1) 根据 $\frac{1}{2}x^3y - x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3 = \frac{1}{2}xy(x - y)^2 = 16$ 求解即可;

(2) 先求出 $x + \frac{1}{x} = 3$, 再求出 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 和 $x^4 + \frac{1}{x^4}$, 最后代入计算即可.

【解答】解: (1) $\because \frac{1}{2}x^3y - x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3 = \frac{1}{2}xy(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{1}{2}xy(x - y)^2 = 16$, $xy = 8$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8(x - y)^2 = 16,$$

$$\therefore (x - y)^2 = 4,$$

$$\therefore x - y = \pm 2;$$

$$(2) \because x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\therefore \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = 0,$$

$$\therefore x - 3 + \frac{1}{x} = 0,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 3,$$

$$\therefore (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9,$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 7,$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) - x - \frac{1}{x} = 3 \times 7 - 3 = 18, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = (x + \frac{1}{x})(x^3 + \frac{1}{x^3}) - x^2 - \frac{1}{x^2} = 3 \times$$

$$18 - 7 = 47,$$

$$\therefore \frac{x^3 + \frac{1}{x^3} + 7}{x^4 + \frac{1}{x^4} + 3} = \frac{18 + 7}{47 + 3} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

【点评】本题考查因式分解的应用, 分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

21. (8分) 对于 a 、 b , 定义了一种新运算“ $\star$ ”为: $a \star b = \begin{cases} \frac{a+b}{5}, & a \geq b \\ \frac{a-b}{5}, & a < b \end{cases}$.

$$\text{如: } 7 \star 3 = \frac{7+3}{5} = 2, \quad 1 \star 3 = \frac{1-3}{5} = -\frac{2}{5}.$$

$$(1) \text{ 计算: } \textcircled{1} 2 \star (-7) = \underline{-1}; \quad \textcircled{2} (-14) \star (-1) = \underline{-\frac{13}{5}}.$$

(2) 若 $A = 2x^2 + ax - y + 6$, $B = 3bx^2 - 15x + 6y - 7$, 且当 $A < B$ 时, $A \star B$ 的值与字母 x 的取值无关, 求 a , b 的值.

(3) 在(2)的条件下, 求 $(b+a) + (2b + \frac{1}{1 \times 2}a) + (3b + \frac{1}{2 \times 3}a) + \cdots + (15b + \frac{1}{14 \times 15}a)$ 的值.

【分析】(1) 根据新定义列式计算即可;

(2) 根据新定义列出相应算式 $A \star B = \frac{1}{5}[(2x^2 + ax - y + 6) - (3bx^2 - 15x + 6y - 7)]$, 再计算即可;

(3) 原式 $= (b + 2b + 3b + \cdots + 15b) + (1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{14 \times 15})a$, 再进一步化简、代入求值即可.

【解答】解: (1) ① $2 \star (-7) = \frac{2-7}{5} = -1$,

② $(-14) \star (-1) = \frac{-14+1}{5} = -\frac{13}{5}$,

故答案为: $-1, -\frac{13}{5}$;

(2) $A < B$ 时, $A \star B = \frac{1}{5}[(2x^2 + ax - y + 6) - (3bx^2 - 15x + 6y - 7)]$

$= \frac{1}{5}[(2 - 3b)x^2 + (a + 15)x - 7y + 13]$

$= \frac{2-3b}{5}x^2 + \frac{a+15}{5}x - \frac{7}{5}y + \frac{13}{5}$,

$\therefore A \star B$ 的值与字母 x 的取值无关,

$\therefore \frac{2-3b}{5} = 0, \frac{a+15}{5} = 0$,

解得 $a = -15, b = \frac{2}{3}$;

(3) 原式 $= (b + 2b + 3b + \cdots + 15b) + (1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{14 \times 15})a$

$= (1 + 2 + 3 + \cdots + 15)b + (1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{14} - \frac{1}{15})a$

$= 120b + \frac{29}{15}a$

$= 120 \times \frac{2}{3} + \frac{29}{15} \times (-15)$

$= 80 - 29$

$= 51$.

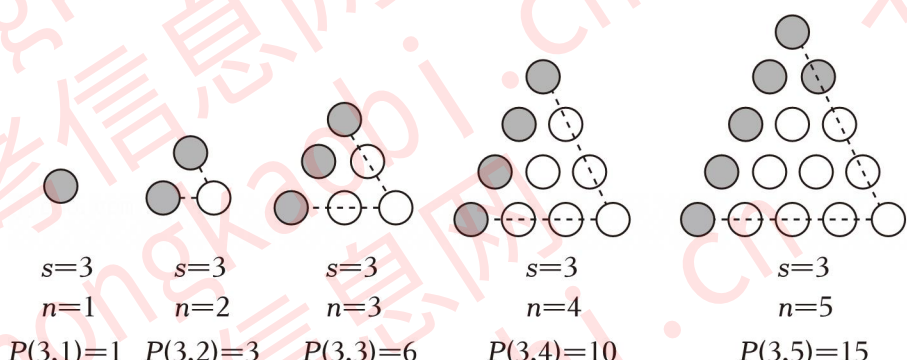
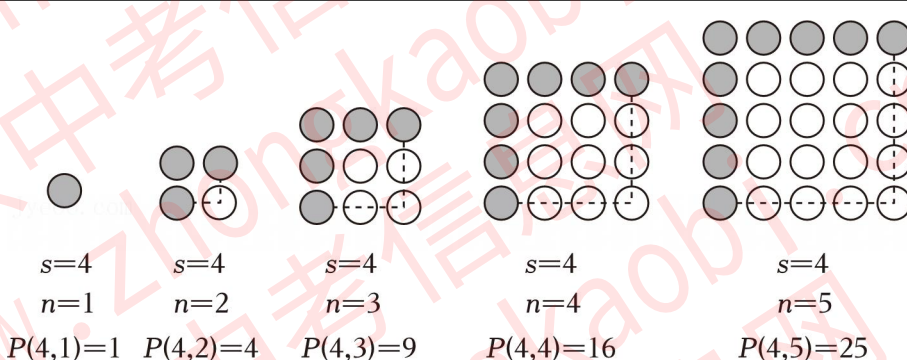
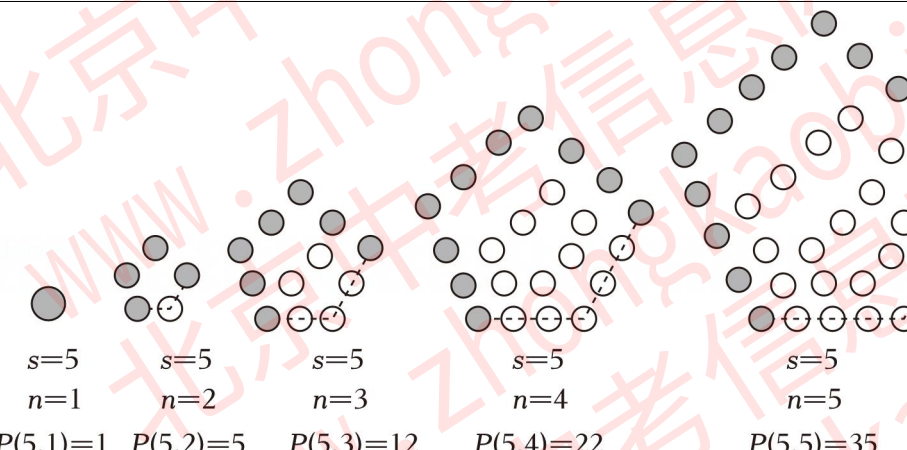
【点评】本题主要考查整式的混合运算, 解题的关键是掌握整式的混合运算顺序和运算法则.

22. (6分) 多边形数是一类有趣的图形数, 它们表示可以在平面上用点排成某种正多边形形状的整数. 对于一个正 s 边形 ($s \geq 3$), 其第 n 个多边形数, 记作 $P(s, n)$

多边形类型	名称	数值
$s=3$	三角形数	1, 3, 6, 10, 15, ...

$s=4$	正方形数	1, 4, 9, 16, 25, ...
$s=5$	五边形数	1, 5, 12, 22, 35, ...

以下给出多边形数的生成过程. 对于一个 s 边形数, 当 $n=1$ 时, $P(s, 1)=1$, 即第一个 s 边形数一定是 1. 第 n 个 s 边形数由第 $n-1$ 个 s 边形数生成: 首先, 基于第 $n-1$ 个 s 边形的两条相邻的边, 每条边新增一个格点, 使得这两条边各有 n 个格点; 然后, 再补齐其他的边, 使得最外层的每条边有 n 个格点; 最后, 计算总格点数.

$s=3$ 三角形数生成过程	 $s=3$ $s=3$ $s=3$ $s=3$ $s=3$ $n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$ $P(3,1)=1$ $P(3,2)=3$ $P(3,3)=6$ $P(3,4)=10$ $P(3,5)=15$
$s=4$ 四边形数生成过程	 $s=4$ $s=4$ $s=4$ $s=4$ $s=4$ $n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$ $P(4,1)=1$ $P(4,2)=4$ $P(4,3)=9$ $P(4,4)=16$ $P(4,5)=25$
$s=5$ 五边形数生成过程	 $s=5$ $s=5$ $s=5$ $s=5$ $s=5$ $n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$ $n=5$ $P(5,1)=1$ $P(5,2)=5$ $P(5,3)=12$ $P(5,4)=22$ $P(5,5)=35$

以五边形数 ($s=5$) 为例, 当 $n=2$, 最外层的每条边有 2 个格点, $P(5, 2)=5$; 当 $n=3$ 时, 将 $n=2$ 时的五边形的右下两条相邻的边各增加一个格点, 保证这两条边中每条边有 3 个格点; 然后, 再补上其他三条边, 保证每条边有 3 个格点; 最后, 整个图形有 12 个格点 (实心格点数和空心格点数之和), 即 $P(5, 3)=12$. 为了能够更好的理解 $P(s, n)$ 的计算方法, 我们在上表中也给了 $s=3$ 的三角形数和

$s=4$ 的四边形数的图形生成和计算过程.

(1) 请直接写出第 6 个五边形数的值: $P(5, 6) = \underline{51}$.

(2) 小明通过总结规律发现:

第 n 个三角形数可以通过以下公式计算: $P(3, n) = \frac{(3-2)n^2-(3-4)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$;

第 n 个四边形数可以通过以下公式计算: $P(4, n) = \frac{(4-2)n^2-(4-4)n}{2} = n^2$;

请你通过观察小明总结的规律, 总结第 n 个五边形数的计算公式:

$P(5, n) = \underline{\frac{3n^2-n}{2}}$. (提示: 总结完公式后, 代入到原题例子中验证一下是否正确.)

猜想, 对于第 n 个 s 边形数, 其计算公式为: $P(s, n) = \underline{\frac{(s-2)n^2-(s-4)n}{2}}$.

(3) 若 $P(7, n) \cdot P(4, n) \div P(3, n)$ 的余式为 $\alpha \cdot P(4, n) + \beta \cdot P(3, n) + \gamma$, 其中 α, β, γ 为常数, 请直接写出 α, β, γ 的值: $\alpha = \underline{8}$; $\beta = \underline{-16}$; $\gamma = \underline{0}$.

【分析】(1) 第 6 个五边形数的值可以通过五边形数的公式计算得到: $P(5, n) = \frac{(3n^2-n)}{2}$, 代入 $n=6$ 得到: $P(5, 6) = \frac{3 \cdot 6^2 - 6}{2} = \frac{108-6}{2} = 51$ 所以, 第 6 个五边形数的值为 51;

(2) 根据小明总结的三角形数和四边形数的公式, 可以推导出五边形数的公式为: $P(5, n) = \frac{(5-2)n^2-(5-4)n}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$ 推广到第 n 个 s 边形数的公式为: $P(s, n) = \frac{(s-2)n^2-(s-4)n}{2}$, 验证该公式

正确性: 当 $s=3$ 时, $P(3, n) = \frac{n^2+n}{2}$ (正确). 当 $s=4$ 时, $P(4, n) = n^2$ (正确). 当 $s=5$ 时, $P(5, n) = \frac{3n^2-n}{2}$

(正确) 所以, 五边形数的计算公式为: $\frac{3n^2-n}{2}$ 一般 s 边形数的公式为: $\frac{(s-2)n^2-(s-4)n}{2}$;

(3) 计算 $P(7, n) \cdot P(4, n) \div P(3, n)$ 的余式: $P(7, n) = \frac{5n^2-3n}{2}$, $P(4, n) = n^2$, $P(3, n) = \frac{n^2+n}{2}$,

计算多项式除法: $\frac{(5n^2-3n)}{2} \cdot n^2 \div \frac{n^2+n}{2} = \frac{5n^4-3n^3}{n^2+n} = 5n^2 - 8n + 8 - \frac{8n}{n^2+n}$, 余式为 $-8n$, 将其表示为 α

$\cdot P(4, n) + \beta \cdot P(3, n) + \gamma$: $-8n = \alpha n^2 + \beta \cdot \frac{n^2+n}{2} + \gamma$, 解得: $\alpha=8$, $\beta=-16$, $\gamma=0$, 所以, $\alpha=8$, $\beta=-16$, $\gamma=0$.

【解答】解: (1) $P(5, 6) = \frac{3 \times 6^2 - 6}{2} = \frac{108-6}{2} = \frac{102}{2} = 51$,

故答案为: 51;

(2) $P(5, n) = \frac{3n^2-n}{2}$,

$P(s, n) = \frac{(s-2)n^2-(s-4)n}{2}$,

故答案为: $\frac{3n^2-n}{2}$; $\frac{(s-2)n^2-(s-4)n}{2}$;

$$(3) P(7, n) = \frac{5n^2-3n}{2},$$

$$P(4, n) = n^2,$$

$$P(3, n) = \frac{n^2+n}{2} \cdot \frac{(5n^2-3n)}{2} \times n^2 \div \frac{n^2+n}{2}$$

$$= 5n^2 - 8n + 8 - \frac{8n}{n^2+n} - 8n$$

$$= 8n^2 - 16 \times \frac{n^2+n}{2} + 0,$$

$$\therefore \alpha=8, \beta=-16, \gamma=0,$$

故答案为: 8, -16, 0.

【点评】 本题考查图形变化规律, 属于难题.